

Name	Vorname	Matrikelnummer

Universität Karlsruhe
Institut für Logik, Komplexität und Deduktionssysteme

o. Prof. Dr. P. Deussen

18. April 2001

Klausur: Informatik III

Lösungsvorschlag

Bitte beachten Sie:

- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.
- Schreiben Sie auf **alle** Blätter Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Die Klausur enthält 10 Blätter und gilt als bestanden, wenn Sie 20 Punkte erreichen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Summe
max. Punkte	10	7	12	7	12	12	60
Punkte							

Note:

Aufgabe 1. Multiple Choice

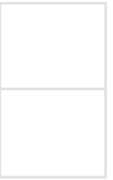
10 Punkte

Geben Sie zu folgenden Aussagen durch Ankreuzen an, ob sie richtig oder falsch sind.

Achtung! Jede richtige Antwort gibt 1 Punkt. Für jede falsche Antwort wird 1 Punkt abgezogen. Fehlende Antworten werden mit 0 Punkten bewertet. Die gesamte Aufgabe wird nie mit einer negativen Punktzahl bewertet.

	richtig	falsch
1. Die Sprache $\{a^n b^n c^n : n \in \text{Nat}\}$ ist regulär.		×
2. Mit der Teilmengenkonstruktion bestimmt man den zustandsminimalen Quotientenakzeptor eines Akzeptors.		×
3. Die Ackermannfunktion ist primitiv rekursiv.		×
4. Es gibt loop-Programme, die nicht terminieren.		×
5. Jede Turing-berechenbare Funktion ist auch von einem loop-Programm berechenbar.		×
6. Die kontextfreien Sprachen sind abgeschlossen unter der Komplementbildung.		×
7. Wenn eine Menge entscheidbar ist, dann ist ihr Komplement aufzählbar.	×	
8. Die regulären Sprachen sind abgeschlossen unter der Komplementbildung.	×	
9. Jede reflexive, transitive und symmetrische Relation ist eine Äquivalenzrelation.	×	
10. Die Ableitbarkeitsrelation ist eine Ordnung.		×

Lösungsvorschlag



Aufgabe 2. Teilmengenkonstruktion

7 Punkte

Gegeben sei ein endlicher Akzeptor A mit

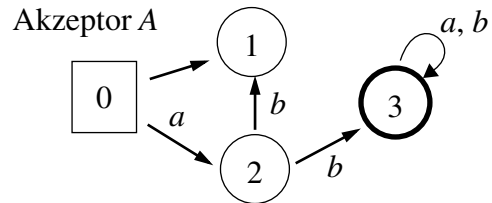
den Zuständen $Q = \{0, 1, 2, 3\}$,

dem Startzustand 0,

dem Eingabealphabet $T = \{a, b\}$

der Finalmenge $F = \{3\}$ sowie

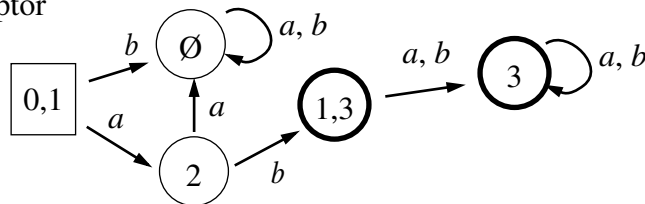
den Produktionen $\Pi = \{0a::=1, 0a::=2, 2b::=1, 2b::=3, 3a::=3, 3b::=3\}$.



Bestimmen Sie den Teilmengenakzeptor von A .

	a	b
0	2	-
1	-	-
2	-	1, 3
1	-	-
3	3	3
3	3	3
-	-	-

Teilmengenakzeptor von A



Aufgabe 3. Reguläre Sprachen, Ableitung

12 Punkte

Sei Π eine Menge von Produktionen der Form $qt ::= q'$, mit $q, q' \in Q$ und $t \in T$.

Die Menge Π' gehe aus Π dadurch hervor, daß jede Produktion $qt ::= q' \in \Pi$ durch $q't ::= q$ ersetzt wird.

Zeigen Sie durch Induktion über die Länge der Ableitung, daß für beliebige $q, q' \in Q$ und $u \in T^*$ gilt:

Wenn $qu \Rightarrow q'$ mit Produktionen aus Π , dann $q'u^c \Rightarrow q$ mit Produktionen aus Π' .

Zur Erinnerung: Das Wort u^c ist das zu u gespiegelte oder konverse Wort.

Induktionsanfang. $|qu \Rightarrow q'| = 0$

Dann $qu = q'$ und somit $q = q'$ und $u = \varepsilon$. Da $\varepsilon^c = \varepsilon$ ist, folgt $q'u^c = q$ und damit ist $q'u^c \Rightarrow q$ eine Ableitung mit Produktionen aus Π' .

Induktionsschritt. $|qu \Rightarrow q'| > 0$

Wir trennen den ersten Schritt ab. Dann gibt es eine Zerlegung $u = tu_1$ mit $t \in T$ und $u_1 \in T^*$ sowie eine Produktion $qt ::= q_1 \in \Pi$, so daß $qtu_1 \rightarrow q_1u_1 \Rightarrow q'$ eine Ableitung mit Produktionen aus Π ist.

(1) Wegen $qt ::= q_1 \in \Pi$ gilt $q_1t ::= q \in \Pi'$.

(2) Wegen $q_1u_1 \Rightarrow q'$ (in Π) gilt nach Induktionsannahme $q'u_1^c \Rightarrow q_1$ (in Π')

Wir betrachten $q'u^c = q'(tu_1)^c = q'u_1^c t$.

Wegen (2) gilt $q'u_1^c t \Rightarrow q_1t$ und wegen (1) $q_1t \rightarrow q$ jeweils mit Produktionen aus Π' . Setzt man beide Ableitungen zusammen, erhält man $q'u_1^c t \Rightarrow q_1t \rightarrow q$, also insgesamt $q'u_1^c t \Rightarrow q$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 4. Minimierung von Automaten und Akzeptoren

7 Punkte

- a. Gegeben sei der folgende *Mealy-Automat* mit dem Startzustand 3. Geben Sie die **Anfangsmarkierung** (und nur diese!) für die Minimierung des Automaten an.

Zustand	Eingabe		
	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
1	2 / 0	4 / 1	3 / 0
2	1 / 0	2 / 0	3 / 1
3	3 / 0	3 / 1	4 / 0
4	4 / 0	2 / 0	1 / 1
	Folgezustand / Ausgabe		

2	X_0		
3		X_0	
4	X_0		X_0
	1	2	3

- b. Gegeben sei die folgende Zustandsübergangstabelle eines endlichen Akzeptors. Führen Sie das **Markierungsverfahren** zur Minimierung des Akzeptors zu Ende. Es genügt, wenn Sie die rechte, untere Tabelle ergänzen. Die Angabe des Quotientenakzeptors ist nicht erforderlich.

Zustand	Eingabe	
	<i>a</i>	<i>b</i>
1	6	1
2	4	5
3	5	6
4	6	1
5	4	2
6	2	3

2	X_0				
3	X_0	X			
4	X_0	X	X		
5	X_0		X	X	
6	X_0	X		X	X
	1	2	3	4	5

Aufgabe 5. Kontextfreie Sprachen

12 Punkte

Gegeben sei die Grammatik $G = (N, T, \Pi, S)$ mit $V = N \cup T$, $T = \{a, b\}$ und den Produktionen:

$$S ::= aSa \mid P \mid aa \quad P ::= bSb \mid bb$$

a. Gehört $babbbbab$ zur erzeugten Sprache? Begründen Sie Ihre Antwort.

Ja, weil $S \rightarrow P \rightarrow bSb \rightarrow baSab \rightarrow baPab \rightarrow babSbab \rightarrow babPbab \rightarrow babbbbab$

b. Sei w^c das gespiegelte Wort w . Zeigen Sie für $S \Rightarrow u \in V^*$, daß $u = wZw^c$ mit $Z \in \{\varepsilon, S, P\}$ und $w \in T^*$ durch Induktion.

Induktion über die Ableitungslänge

Induktionsanfang: $S \Rightarrow S$. Mit $w = \varepsilon$ und $Z = S$ ist die Behauptung erfüllt.

Induktionsschritt: Abtrennung des letzten Ableitungsschritts: Unter Anwendung der Induktionsvoraussetzung erhalten wir: $S \Rightarrow wZw^c \rightarrow u$, wobei $Z \neq \varepsilon$.

Ist $Z = S$, dann $u = waSaw^c$, wPw^c oder $waaw^c$.

Ist $Z = P$, dann $u = wbSbw^c$ oder $wbbw^c$.

Fortsetzung von Aufgabe 5. Produktionen Π von G : $S ::= aSa \mid P \mid aa$ $P ::= bSb \mid bb$

c. Geben Sie die zu G gehörenden Π_{LR} -Produktionen an.

$$aSa q \mid P q \mid aa q ::= S q \quad bSb q \mid bb q ::= P q$$

$$q t ::= t q \text{ für alle } t \in T$$

d. Bestimmen Sie für alle Produktionen $A ::= r$ von Π die Mengen $\text{First}_1(r \text{ Follow}(A))$. Ist die Grammatik SLL(1)? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$S ::= aSa \mid P \mid aa \quad \text{First}_1(aSa \text{ Follow}(S)) = \{a\} \quad \text{First}_1(P \text{ Follow}(S)) = \{b\}$$

$$\text{First}_1(aa \text{ Follow}(S)) = \{a\}$$

$$P ::= bSb \mid bb \quad \text{First}_1(bSb \text{ Follow}(P)) = \{b\} \quad \text{First}_1(bb \text{ Follow}(P)) = \{b\}$$

Die Grammatik ist nicht SLL(1), da die Bedingung „ $\text{First}_1(r \text{ Follow}(A)) \cap \text{First}_1(s \text{ Follow}(A)) = \emptyset$ für je zwei Produktionen der Form $A ::= r \mid s$ “ nicht erfüllt ist

Name:

Matrikelnummer:

Klausur: Informatik III, 18. April 2001

Blatt 8 von 10

Lösungsvorschlag

Aufgabe 6. Berechenbarkeit

12 Punkte

a. Sei m Ihre Matrikelnummer und die Funktion $f: \text{Nat} \rightarrow \text{Nat}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \varphi_m(m) \downarrow \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Ist f berechenbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Entweder ist f konstant 1 oder konstant 0. In beiden Fällen ist f durch ein While-Programm mit Ergänzungen berechenbar: „begin X1:=0 end“ oder „begin X1:=1 end“.

b. Geben Sie ein While-Programm **ohne Ergänzungen** an, das die Funktion

$g: \text{Nat}^2 \rightarrow \text{Nat}$, mit $g(x, y) = x + 2y$, berechnet.

```
begin
  X3:= 0;
  while X2≠X3 do
    X1:=Nachf(X1);
    X1:=Nachf(X1);
    X2:=Vorg(X2)
  od
end
```

(weitere Teilaufgaben dieser Aufgabe dem nächsten Blatt)

Fortsetzung von Aufgabe 6.

c. Gegeben seien die Funktionen $h_0, h_1, h_2, h_3, \dots: \text{Nat} \rightarrow \text{Nat}$, mit

$$h_0(x) = 0, h_1(x) = x, h_2(x) = 2x, h_3(x) = 3x, \dots \text{ für alle } x \in \text{Nat}.$$

Zeigen Sie mit Hilfe des s-n-m-Theorems, daß es eine totale und berechenbare Funktion $u: \text{Nat} \rightarrow \text{Nat}$, mit $\varphi_{u(i)}^{(1)} = h_i$ gibt.

s-n-m-Theorem: Es gibt eine totale und berechenbare Funktion $s_n^m: \text{Nat}^{m+1} \rightarrow \text{Nat}$, so dass für alle m -Tupel (y_1, \dots, y_m) und n -Tupel (z_1, \dots, z_n) natürlicher Zahlen und $k \in \text{Nat}$ gilt:

$$\varphi_{s_n^m(k, y_1, \dots, y_m)}^{(n)}(z_1, \dots, z_n) = \varphi_k^{(m+n)}(y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n)$$

Sei $h: \text{Nat}^2 \rightarrow \text{Nat}$ mit $h(i, x) = i \cdot x$ gegeben.

h berechenbar \curvearrowright Es gibt $e \in \text{Nat}$ mit $\varphi_e^{(2)} = h$

s-n-m-Theorem \curvearrowright Es gibt totales und brb. $s_1^1: \text{Nat}^2 \rightarrow \text{Nat}$ mit $\varphi_{s_1^1(e, i)}^{(1)}(x) = \varphi_e^{(2)}(i, x)$

Somit gilt $\varphi_{s_1^1(e, i)}^{(1)}(x) = \varphi_e^{(2)}(i, x) = h(i, x) = h_i(x)$

Dann ist $u: \text{Nat} \rightarrow \text{Nat}$ mit $u(i) := s_1^1(e, i)$ auch total und brb. und es gilt $\varphi_{u(i)}^{(1)} = h_i$.

Name:

Matrikel-Nr.:

Klausur: Informatik III, 18. April 2001

Blatt 10 von 10

Lösungsvorschlag

Konzeptpapier