

Name	Vorname	Matrikelnummer

**Universität Karlsruhe**  
**Institut für Logik, Komplexität und Deduktionssysteme**

o. Prof. Dr. P. Deussen

18. April 2001

Klausur: Informatik III

Lösungsvorschlag

Bitte beachten Sie:

- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.
- Schreiben Sie auf **alle** Blätter Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Die Klausur enthält 10 Blätter und gilt als bestanden, wenn Sie 20 Punkte erreichen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Summe
max. Punkte	10	7	12	7	12	12	60
Punkte							

**Note:**

Name:

Matrikelnummer:

Klausur: Informatik III, 18. April 2001

Blatt 2 von 10

Lösungsvorschlag

**Aufgabe 1.** Multiple Choice

10 Punkte

Geben Sie zu folgenden Aussagen durch Ankreuzen an, ob sie richtig oder falsch sind.

**Achtung!** Jede richtige Antwort gibt 1 Punkt. Für jede falsche Antwort wird 1 Punkt abgezogen. Fehlende Antworten werden mit 0 Punkten bewertet. Die gesamte Aufgabe wird nie mit einer negativen Punktzahl bewertet.

	richtig	falsch
1. Die Sprache $\{a^n b^n c^n : n \in \text{Nat}\}$ ist regulär.	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
2. Mit der Teilmengenkonstruktion bestimmt man den zustandsminimalen Quotientenakzeptor eines Akzeptors.	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
3. Die Ackermannfunktion ist primitiv rekursiv.	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
4. Es gibt loop-Programme, die nicht terminieren.	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
5. Jede Turing-berechenbare Funktion ist auch von einem loop-Programm berechenbar.	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
6. Die kontextfreien Sprachen sind abgeschlossen unter der Komplementbildung.	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
7. Wenn eine Menge entscheidbar ist, dann ist ihr Komplement aufzählbar.	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
8. Die regulären Sprachen sind abgeschlossen unter der Komplementbildung.	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
9. Jede reflexive, transitive und symmetrische Relation ist eine Äquivalenzrelation.	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
10. Die Ableitbarkeitsrelation ist eine Ordnung.	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>



**Aufgabe 2.** Teilmengenkonstruktion

7 Punkte

Gegeben sei ein endlicher Akzeptor  $A$  mit

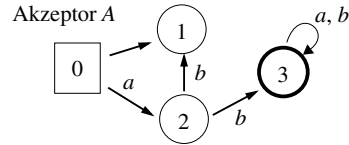
den Zuständen  $Q = \{0, 1, 2, 3\}$ ,

dem Startzustand 0,

dem Eingabealphabet  $T = \{a, b\}$

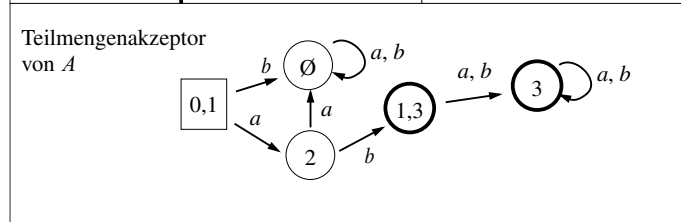
der Finalmenge  $F = \{3\}$  sowie

den Produktionen  $\Pi = \{0 ::= 1, 0a ::= 2, 2b ::= 1, 2b ::= 3, 3a ::= 3, 3b ::= 3\}$ .



Bestimmen Sie den Teilmengenakzeptor von  $A$ .

	$a$	$b$
0	2	-
1	-	-
2	-	1, 3
1	-	-
3	3	3
3	3	3
-	-	-



**Aufgabe 3.** Reguläre Sprachen, Ableitung

12 Punkte

Sei  $\Pi$  eine Menge von Produktionen der Form  $qt ::= q'$ , mit  $q, q' \in Q$  und  $t \in T$ .

Die Menge  $\Pi'$  gehe aus  $\Pi$  dadurch hervor, daß jede Produktion  $qt ::= q' \in \Pi$  durch  $q't ::= q$  ersetzt wird.

Zeigen Sie durch Induktion über die Länge der Ableitung, daß für beliebige  $q, q' \in Q$  und  $u \in T^*$  gilt:

Wenn  $qu \Rightarrow q'$  mit Produktionen aus  $\Pi$ , dann  $q'u^c \Rightarrow q$  mit Produktionen aus  $\Pi'$ .

Zur Erinnerung: Das Wort  $u^c$  ist das zu  $u$  gespiegelte oder konverse Wort.

*Induktionsanfang.*  $|qu \Rightarrow q'| = 0$

Dann  $qu = q'$  und somit  $q = q'$  und  $u = \epsilon$ . Da  $\epsilon^c = \epsilon$  ist, folgt  $q'u^c = q$  und damit ist  $q'u^c \Rightarrow q$  eine Ableitung mit Produktionen aus  $\Pi'$ .

*Induktionsschritt.*  $|qu \Rightarrow q'| > 0$

Wir trennen den ersten Schritt ab. Dann gibt es eine Zerlegung  $u = tu_1$  mit  $t \in T$  und  $u_1 \in T^*$  sowie eine Produktion  $qt ::= q_1 \in \Pi$ , so daß  $qtu_1 \rightarrow q_1u_1 \Rightarrow q'$  eine Ableitung mit Produktionen aus  $\Pi$  ist.

(1) Wegen  $qt ::= q_1 \in \Pi$  gilt  $q_1t ::= q \in \Pi'$ .

(2) Wegen  $q_1u_1 \Rightarrow q'$  (in  $\Pi$ ) gilt nach Induktionsannahme  $q'u_1^c \Rightarrow q_1$  (in  $\Pi'$ )

Wir betrachten  $q'u^c = q'(tu_1)^c = q'u_1^c t$ .

Wegen (2) gilt  $q'u_1^c \Rightarrow q_1t$  und wegen (1)  $q_1t \rightarrow q$  jeweils mit Produktionen aus  $\Pi'$ . Setzt man beide Ableitungen zusammen, erhält man  $q'u_1^c t \Rightarrow q_1t \rightarrow q$ , also insgesamt  $q'u^c \Rightarrow q$ . Damit ist die Behauptung bewiesen.

Lösungsvorschlag



**Aufgabe 4.** Minimierung von Automaten und Akzeptoren

7 Punkte

- a. Gegeben sei der folgende *Mealy-Automat* mit dem Startzustand 3. Geben Sie die **Anfangsmarkierung** (und nur diese!) für die Minimierung des Automaten an.

Zustand	Eingabe		
	a	b	c
1	2 / 0	4 / 1	3 / 0
2	1 / 0	2 / 0	3 / 1
3	3 / 0	3 / 1	4 / 0
4	4 / 0	2 / 0	1 / 1
	Folgezustand / Ausgabe		

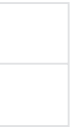
2	$X_0$		
3		$X_0$	
4	$X_0$		$X_0$
	1	2	3

- b. Gegeben sei die folgende Zustandsübergangstabelle eines endlichen Akzeptors. Führen Sie das **Markierungsverfahren** zur Minimierung des Akzeptors zu Ende. Es genügt, wenn Sie die rechte, untere Tabelle ergänzen. Die Angabe des Quotientenakzeptors ist nicht erforderlich.

Zustand	Eingabe	
	a	b
1	6	1
2	4	5
3	5	6
4	6	1
5	4	2
6	2	3

2	$X_0$				
3	$X_0$	X			
4	$X_0$	X	X		
5	$X_0$		X	X	
6	$X_0$	X		X	X
	1	2	3	4	5

Lösungsvorschlag



**Aufgabe 5.** Kontextfreie Sprachen

12 Punkte

- Gegeben sei die Grammatik  $G = (N, T, \Pi, S)$  mit  $V = N \cup T, T = \{a, b\}$  und den Produktionen:

$$S ::= aSa \mid P \mid aa \quad P ::= bSb \mid bb$$

- a. Gehört *babbbbab* zur erzeugten Sprache? Begründen Sie Ihre Antwort.

Ja, weil  $S \rightarrow P \rightarrow bSb \rightarrow baSab \rightarrow baPab \rightarrow babSbab \rightarrow babPbab \rightarrow babbbbab$

- b. Sei  $w^c$  das gespiegelte Wort  $w$ . Zeigen Sie für  $S \Rightarrow u \in V^*$ , daß  $u = wZw^c$  mit  $Z \in \{\epsilon, S, P\}$  und  $w \in T^*$  durch Induktion.

Induktion über die Ableitungslänge

Induktionsanfang:  $S \Rightarrow S$ . Mit  $w = \epsilon$  und  $Z = S$  ist die Behauptung erfüllt.

Induktionsschritt: Abtrennung des letzten Ableitungsschritts: Unter Anwendung der Induktionsvoraussetzung erhalten wir:  $S \Rightarrow wZw^c \rightarrow u$ , wobei  $Z \neq \epsilon$ .

Ist  $Z = S$ , dann  $u = waSaw^c, wPw^c$  oder  $waaw^c$ .

Ist  $Z = P$ , dann  $u = wbSbw^c$  oder  $wbbw^c$ .

(weitere Teilaufgaben dieser Aufgabe auf dem nächsten Blatt)

Name:

Matrikelnummer:

Klausur: Informatik III, 18. April 2001

Blatt 7 von 10

Lösungsvorschlag

**Fortsetzung von Aufgabe 5.** Produktionen  $\Pi$  von  $G$ :  $S ::= aSa \mid P \mid aa$   $P ::= bSb \mid bb$

c. Geben Sie die zu  $G$  gehörenden  $\Pi_{LR}$ -Produktionen an.

$aSa \mid P \mid aa \Rightarrow Sq$   $bSb \mid bb \Rightarrow Pq$   
 $qt ::= tq$  für alle  $t \in T$

d. Bestimmen Sie für alle Produktionen  $A ::= r$  von  $\Pi$  die Mengen  $\text{First}_1(r \text{ Follow}(A))$ . Ist die Grammatik SLL(1)? Begründen Sie Ihre Antwort.

$S ::= aSa \mid P \mid aa$   $\text{First}_1(aSa \text{ Follow}(S)) = \{a\}$   $\text{First}_1(P \text{ Follow}(S)) = \{b\}$   
 $\text{First}_1(aa \text{ Follow}(S)) = \{a\}$   
 $P ::= bSb \mid bb$   $\text{First}_1(bSb \text{ Follow}(P)) = \{b\}$   $\text{First}_1(bb \text{ Follow}(P)) = \{b\}$

Die Grammatik ist nicht SLL(1), da die Bedingung „ $\text{First}_1(r \text{ Follow}(A)) \cap \text{First}_1(s \text{ Follow}(A)) = \emptyset$  für je zwei Produktionen der Form  $A ::= r \mid s$ “ nicht erfüllt ist

Name:

Matrikelnummer:

Klausur: Informatik III, 18. April 2001

Blatt 8 von 10

Lösungsvorschlag

**Aufgabe 6.** Berechenbarkeit

12 Punkte

a. Sei  $m$  Ihre Matrikelnummer und die Funktion  $f: \text{Nat} \rightarrow \text{Nat}$  definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \varphi_m(m) \downarrow \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Ist  $f$  berechenbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Entweder ist  $f$  konstant 1 oder konstant 0. In beiden Fällen ist  $f$  durch ein While-Programm mit Ergänzungen berechenbar: „begin X1:=0 end“ oder „begin X1:=1 end“.

b. Geben Sie ein While-Programm **ohne Ergänzungen** an, das die Funktion  $g: \text{Nat}^2 \rightarrow \text{Nat}$ , mit  $g(x, y) = x + 2y$ , berechnet.

```
begin
  X3:= 0;
  while X2≠X3 do
    X1:=Nachf(X1);
    X1:=Nachf(X1);
    X2:=Vorg(X2)
  od
end
```

(weitere Teilaufgaben dieser Aufgabe dem nächsten Blatt)

**Fortsetzung von Aufgabe 6.**

c. Gegeben seien die Funktionen  $h_0, h_1, h_2, h_3, \dots : \text{Nat} \rightarrow \text{Nat}$ , mit

$$h_0(x) = 0, h_1(x) = x, h_2(x) = 2x, h_3(x) = 3x, \dots \text{ für alle } x \in \text{Nat}.$$

Zeigen Sie mit Hilfe des s-n-m-Theorems, daß es eine totale und berechenbare Funktion  $u : \text{Nat} \rightarrow \text{Nat}$ , mit  $\varphi_{u(i)}^{(1)} = h_i$  gibt.

**s-n-m-Theorem:** Es gibt eine totale und berechenbare Funktion  $s_n^m : \text{Nat}^{m+1} \rightarrow \text{Nat}$ , so dass für alle  $m$ -Tupel  $(y_1, \dots, y_m)$  und  $n$ -Tupel  $(z_1, \dots, z_n)$  natürlicher Zahlen und  $k \in \text{Nat}$  gilt:

$$\varphi_{s_n^m(k, y_1, \dots, y_m)}^{(n)}(z_1, \dots, z_n) = \varphi_k^{(m+n)}(y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n)$$

Sei  $h : \text{Nat}^2 \rightarrow \text{Nat}$  mit  $h(i, x) = i \cdot x$  gegeben.

$h$  berechenbar  $\curvearrowright$  Es gibt  $e \in \text{Nat}$  mit  $\varphi_e^{(2)} = h$

s-n-m-Theorem  $\curvearrowright$  Es gibt totales und brb.  $s_1^1 : \text{Nat}^2 \rightarrow \text{Nat}$  mit  $\varphi_{s_1^1(e, i)}^{(1)}(x) = \varphi_e^{(2)}(i, x)$

Somit gilt  $\varphi_{s_1^1(e, i)}^{(1)}(x) = \varphi_e^{(2)}(i, x) = h(i, x) = h_i(x)$

Dann ist  $u : \text{Nat} \rightarrow \text{Nat}$  mit  $u(i) := s_1^1(e, i)$  auch total und brb. und es gilt  $\varphi_{u(i)}^{(1)} = h_i$ .

**Konzeptpapier**