

Theoretische Grundlagen der Informatik

Übung am 4.2.2011

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK



- Nochmal zur Info: Der Klausurbonus wird nur auf *bestandene* Klausuren vergeben
- Es ist also nicht möglich, die Klausur durch den Bonus zu bestehen
- Voraussetzung für den Klausurbonus: mindestens 77 Punkte auf den Übungsblättern
- Sobald das 6. Übungsblatt fertig korrigiert ist, stellen wir eine Liste online, anhand derer ihr ablesen könnt, ob ihr den Bonus bekommt oder nicht
- Bitte überprüft dies!

Aufgabe 1

Bringen Sie die kontextfreie Grammatik $G = (\Sigma, V, S, R)$ mit $\Sigma = \{a, b, c, d\}$, $V = \{S, A, B, C, D\}$ und R wie folgt gegeben in Chomsky-Normalform:

$$S \rightarrow A \mid aB \mid aC$$

$$B \rightarrow S \mid Ba$$

$$D \rightarrow d \mid dDD$$

$$A \rightarrow B \mid C \mid cAd$$

$$C \rightarrow D \mid c$$

Aufgabe 1

Schritt 1: Alle Regeln enthalten auf der rechten Seite nur Symbole aus V oder nur ein Symbol aus Σ . Ersetze dazu a , b und d mit neuen Variablen Z_a , Z_b und Z_d

$$S \rightarrow A \mid aB \mid aC$$

$$B \rightarrow S \mid Ba$$

$$D \rightarrow d \mid dDD$$

$$A \rightarrow B \mid C \mid cAd$$

$$C \rightarrow D \mid c$$

$$S \rightarrow A \mid Z_aB \mid Z_aC$$

$$B \rightarrow S \mid BZ_a$$

$$D \rightarrow Z_d \mid Z_dDD$$

$$A \rightarrow B \mid C \mid Z_cAZ_d$$

$$C \rightarrow D \mid Z_c$$

$$Z_a \rightarrow a$$

$$Z_c \rightarrow c$$

$$Z_d \rightarrow d$$

Aufgabe 1

Schritt 2: Alle rechten Seiten haben Länge ≤ 2 .

$$S \rightarrow A \mid Z_a B \mid Z_a C$$

$$B \rightarrow S \mid B Z_a$$

$$D \rightarrow Z_d \mid Z_d D D$$

$$A \rightarrow B \mid C \mid Z_c A Z_d$$

$$C \rightarrow D \mid Z_c$$

$$Z_a \rightarrow a$$

$$Z_c \rightarrow c$$

$$Z_d \rightarrow d$$

$$S \rightarrow A \mid Z_a B \mid Z_a C$$

$$B \rightarrow S \mid B Z_a$$

$$D \rightarrow Z_d \mid Z_d E$$

$$A \rightarrow B \mid C \mid Z_c F$$

$$C \rightarrow D \mid Z_c$$

$$Z_a \rightarrow a$$

$$Z_c \rightarrow c$$

$$Z_d \rightarrow d$$

$$E \rightarrow D D$$

$$F \rightarrow A Z_d$$

Aufgabe 1

Schritt 3: Es kommen keine Regeln $A \rightarrow \epsilon$ vor. Hier ist nichts zu tun, die Grammatik erfüllt dies bereits.

$$S \rightarrow A \mid Z_a B \mid Z_a C$$

$$B \rightarrow S \mid B Z_a$$

$$D \rightarrow Z_d \mid Z_d E$$

$$A \rightarrow B \mid C \mid Z_c F$$

$$C \rightarrow D \mid Z_c$$

$$Z_a \rightarrow a$$

$$Z_c \rightarrow c$$

$$Z_d \rightarrow d$$

$$E \rightarrow DD$$

$$F \rightarrow AZ_d$$

Aufgabe 1

Schritt 4: Ersetzung aller Kettenregeln $A \rightarrow B$.

$S \rightarrow A \mid Z_a B \mid Z_a C$

$B \rightarrow S \mid B Z_a$

$D \rightarrow Z_d \mid Z_d E$

$A \rightarrow B \mid C \mid Z_c F$

$C \rightarrow D \mid Z_c$

$Z_a \rightarrow a$

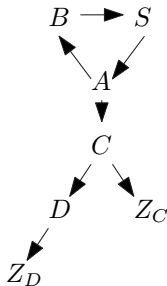
$Z_c \rightarrow c$

$Z_d \rightarrow d$

$E \rightarrow DD$

$F \rightarrow AZ_d$

Abhängigkeitsgraph:



Aufgabe 1

Schritt 4: Eliminiere Kreis $B \rightarrow S \rightarrow A \rightarrow B$.

$$S \rightarrow A \mid Z_a B \mid Z_a C$$

$$B \rightarrow S \mid B Z_a$$

$$D \rightarrow Z_d \mid Z_d E$$

$$A \rightarrow B \mid C \mid Z_c F$$

$$C \rightarrow D \mid Z_c$$

$$Z_a \rightarrow a$$

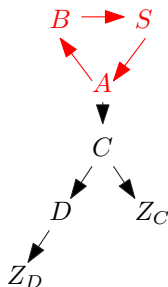
$$Z_c \rightarrow c$$

$$Z_d \rightarrow d$$

$$E \rightarrow DD$$

$$F \rightarrow AZ_d$$

Abhängigkeitsgraph:



Aufgabe 1

Schritt 4: Eliminiere Kreis $B \rightarrow S \rightarrow A \rightarrow B$.

$$S \rightarrow Z_a S \mid Z_a C \mid S Z_a \mid C \mid Z_c F$$

$$D \rightarrow Z_d \mid Z_d E$$

$$C \rightarrow D \mid Z_c$$

$$Z_a \rightarrow a$$

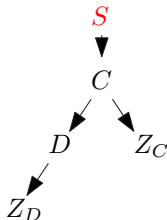
$$Z_c \rightarrow c$$

$$Z_d \rightarrow d$$

$$E \rightarrow DD$$

$$F \rightarrow S Z_d$$

Abhängigkeitsgraph:



Aufgabe 1

Schritt 4: Eliminiere verbleibende Kettenregeln

- Topologische Sortierung: S, C, D, Z_c, Z_d
- Keine Kettenregeln mit linker Seite Z_d und Z_c

$S \rightarrow Z_a S \mid Z_a C \mid S Z_a \mid C \mid Z_c F$

$D \rightarrow Z_d \mid Z_d E$

$C \rightarrow D \mid Z_c$

$Z_a \rightarrow a$

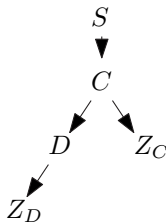
$Z_c \rightarrow c$

$Z_d \rightarrow d$

$E \rightarrow DD$

$F \rightarrow S Z_d$

Abhängigkeitsgraph:



Aufgabe 1

Schritt 4: Eliminiere verbleibende Kettenregeln

- Topologische Sortierung: S, C, D, Z_c, Z_d
- Ersetze Kettenregeln mit linker Seite D

$S \rightarrow Z_a S \mid Z_a C \mid S Z_a \mid C \mid Z_c F$

$D \rightarrow Z_d \mid Z_d E$

$C \rightarrow D \mid Z_c$

$Z_a \rightarrow a$

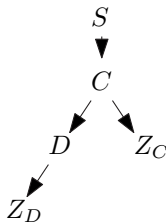
$Z_c \rightarrow c$

$Z_d \rightarrow d$

$E \rightarrow DD$

$F \rightarrow S Z_d$

Abhängigkeitsgraph:



Aufgabe 1

Schritt 4: Eliminiere verbleibende Kettenregeln

- Topologische Sortierung: S, C, D, Z_c, Z_d
- Ersetze Kettenregeln mit linker Seite D

$$S \rightarrow Z_a S \mid Z_a C \mid S Z_a \mid C \mid Z_c F$$

$$D \rightarrow d \mid Z_d E$$

$$C \rightarrow D \mid Z_c$$

$$Z_a \rightarrow a$$

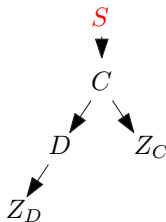
$$Z_c \rightarrow c$$

$$Z_d \rightarrow d$$

$$E \rightarrow DD$$

$$F \rightarrow S Z_d$$

Abhängigkeitsgraph:



Aufgabe 1

Schritt 4: Eliminiere verbleibende Kettenregeln

- Topologische Sortierung: S, C, D, Z_c, Z_d
- Ersetze Kettenregeln mit linker Seite C

$$S \rightarrow Z_a S \mid Z_a C \mid S Z_a \mid C \mid Z_c F$$

$$D \rightarrow d \mid Z_d E$$

$$C \rightarrow D \mid Z_c$$

$$Z_a \rightarrow a$$

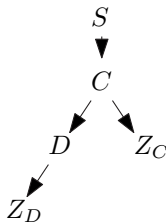
$$Z_c \rightarrow c$$

$$Z_d \rightarrow d$$

$$E \rightarrow DD$$

$$F \rightarrow S Z_d$$

Abhängigkeitsgraph:



Aufgabe 1

Schritt 4: Eliminiere verbleibende Kettenregeln

- Topologische Sortierung: S, C, D, Z_C, Z_D
- Ersetze Kettenregeln mit linker Seite C

$$S \rightarrow Z_a S \mid Z_a C \mid S Z_a \mid C \mid Z_c F$$

$$D \rightarrow d \mid Z_d E$$

$$C \rightarrow d \mid Z_d E \mid c$$

$$Z_a \rightarrow a$$

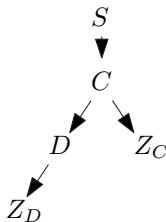
$$Z_c \rightarrow c$$

$$Z_d \rightarrow d$$

$$E \rightarrow DD$$

$$F \rightarrow S Z_d$$

Abhängigkeitsgraph:



Aufgabe 1

Schritt 4: Eliminiere verbleibende Kettenregeln

- Topologische Sortierung: S, C, D, Z_c, Z_d
- Ersetze Kettenregeln mit linker Seite S

$$S \rightarrow Z_a S \mid Z_a C \mid S Z_a \mid C \mid Z_c F$$

$$D \rightarrow d \mid Z_d E$$

$$C \rightarrow d \mid Z_d E \mid c$$

$$Z_a \rightarrow a$$

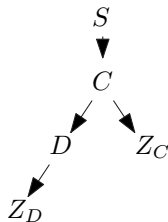
$$Z_c \rightarrow c$$

$$Z_d \rightarrow d$$

$$E \rightarrow DD$$

$$F \rightarrow S Z_d$$

Abhängigkeitsgraph:



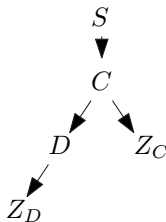
Aufgabe 1

Schritt 4: Eliminiere verbleibende Kettenregeln

- Topologische Sortierung: S, C, D, Z_c, Z_d
- Ersetze Kettenregeln mit linker Seite S

$$\begin{aligned} S &\rightarrow Z_a S \mid Z_a C \mid S Z_a \\ S &\rightarrow d \mid Z_d E \mid c \mid Z_c F \\ D &\rightarrow d \mid Z_d E \\ C &\rightarrow d \mid Z_d E \mid c \\ Z_a &\rightarrow a \\ Z_c &\rightarrow c \\ Z_d &\rightarrow d \\ E &\rightarrow DD \\ F &\rightarrow S Z_d \end{aligned}$$

Abhängigkeitsgraph:



Aufgabe 2

Gegeben sei die Grammatik $G_3 = (\Sigma, V, S, R)$ mit $\Sigma = \{a, b\}$ und $V = \{A, B, S, X\}$. Die Regelmeng R sei gegeben durch:

$$S \rightarrow AX \mid AB$$

$$X \rightarrow SB$$

$$A \rightarrow a$$

$$B \rightarrow b$$

- Läßt sich der CYK-Algorithmus auf G_3 anwenden? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Prüfen Sie mithilfe des CYK-Algorithmus, ob das Wort $aaabbb$ in $L(G)$ liegt, nachdem G gegebenenfalls so angepasst wurde, dass der Algorithmus anwendbar ist.

Aufgabe 2 a)

Läßt sich der CYK-Algorithmus auf G_3 anwenden? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$S \rightarrow AX \mid AB$$

$$X \rightarrow SB$$

$$A \rightarrow a$$

$$B \rightarrow b$$

Aufgabe 2 a)

Läßt sich der CYK-Algorithmus auf G_3 anwenden? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$S \rightarrow AX \mid AB$$

$$X \rightarrow SB$$

$$A \rightarrow a$$

$$B \rightarrow b$$

Lösung:

- Voraussetzung für den CYK-Algorithmus ist, dass die betrachtete Grammatik in Chomsky-Normalform ist
- G_3 ist bereits in Chomsky-Normalform, also kann der Algorithmus ohne Modifikation an der Grammatik angewandt werden

Aufgabe 2 b)

Prüfen Sie mithilfe des CYK-Algorithmus, ob das Wort $aaabbb$ in $L(G)$ liegt.

$$S \rightarrow AX \mid AB$$

$$X \rightarrow SB$$

$$A \rightarrow a$$

$$B \rightarrow b$$

V_{16}					
V_{15}	V_{26}				
V_{14}	V_{25}	V_{36}			
V_{13}	V_{24}	V_{35}	V_{46}		
V_{12}	V_{23}	V_{34}	V_{45}	V_{56}	
V_{11}	V_{22}	V_{33}	V_{44}	V_{55}	V_{66}
a	a	a	b	b	b
1	2	3	4	5	6

Aufgabe 2 b)

Prüfen Sie mithilfe des CYK-Algorithmus, ob das Wort $aaabbb$ in $L(G)$ liegt.

$$S \rightarrow AX \mid AB$$

$$X \rightarrow SB$$

$$A \rightarrow a$$

$$B \rightarrow b$$

V_{16}					
V_{15}	V_{26}				
V_{14}	V_{25}	V_{36}			
V_{13}	V_{24}	V_{35}	V_{46}		
V_{12}	V_{23}	V_{34}	V_{45}	V_{56}	
A	A	A	B	B	B
a	a	a	b	b	b
1	2	3	4	5	6

Aufgabe 2 b)

Prüfen Sie mithilfe des CYK-Algorithmus, ob das Wort $aaabbb$ in $L(G)$ liegt.

$$S \rightarrow AX \mid AB$$

$$X \rightarrow SB$$

$$A \rightarrow a$$

$$B \rightarrow b$$

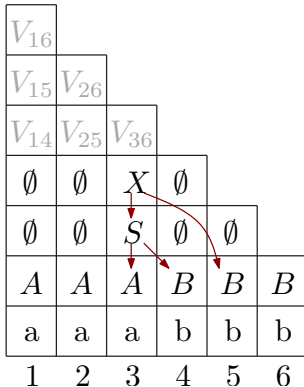
V_{16}						
V_{15}	V_{26}					
V_{14}	V_{25}	V_{36}				
V_{13}	V_{24}	V_{35}	V_{46}			
\emptyset	\emptyset	S	\emptyset	\emptyset		
A	A	A	B	B	B	
a	a	a	b	b	b	
1	2	3	4	5	6	

Aufgabe 2 b)

Prüfen Sie mithilfe des CYK-Algorithmus, ob das Wort $aaabbb$ in $L(G)$ liegt.

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AX \mid AB \\ X &\rightarrow SB \\ A &\rightarrow a \\ B &\rightarrow b \end{aligned}$$

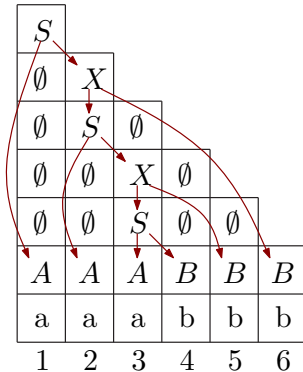
V_{16}					
V_{15}	V_{26}				
V_{14}	V_{25}	V_{36}			
\emptyset	\emptyset	X	\emptyset		
\emptyset	\emptyset	S	\emptyset	\emptyset	
A	A	A	B	B	B
a	a	a	b	b	b
1	2	3	4	5	6



Aufgabe 2 b)

Prüfen Sie mithilfe des CYK-Algorithmus, ob das Wort $aaabbb$ in $L(G)$ liegt.

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AX \mid AB \\ X &\rightarrow SB \\ A &\rightarrow a \\ B &\rightarrow b \end{aligned}$$



Lösung:

- S ist in V_{16} , also liegt $aaabbb$ in der von G_3 erzeugten Sprache

Aufgabe 3

Zeigen oder widerlegen Sie, dass die kontextfreien Sprachen unter Spiegelung abgeschlossen sind. Die Spiegelung einer Sprache entsteht durch Spiegelung aller Wörter der Sprache, d. h. die Spiegelsprache L^R ist gegeben durch $L^R = \{w^R \mid w \in L\}$. $w^R = w_k \cdots w_1$ bezeichne dabei das Spiegelwort von $w = w_1 \cdots w_k$.

Aufgabe 3

Zeigen oder widerlegen Sie, dass die kontextfreien Sprachen unter Spiegelung abgeschlossen sind.

Aufgabe 3

Zeigen oder widerlegen Sie, dass die kontextfreien Sprachen unter Spiegelung abgeschlossen sind.

Lösung:

- Sei $G = (V, \Sigma, S, R)$ eine kontextfreie Grammatik
- Konstruiere daraus kontextfreie Grammatik $G^R = (V, \Sigma, S, R^R)$ für $L(G)^R$, indem man für jede Regel $A \rightarrow \beta$ aus R eine Regel $A \rightarrow \beta^R$ hinzunimmt
- Zu zeigen ist, dass $L(G)^R = L(G^R)$ ist

Aufgabe 3

Zeigen oder widerlegen Sie, dass die kontextfreien Sprachen unter Spiegelung abgeschlossen sind.

Lösung:

Zeige, dass $L(G)^R \subseteq L(G^R)$ ist:

- Seien $R_1, \dots, R_n \in R$ eine Folge von Ableitungen, so dass
$$S \xrightarrow{R_1} \dots \xrightarrow{R_n} \delta$$
- Behauptung: $S \xrightarrow{R_1^R} \dots \xrightarrow{R_n^R} \delta^R$
- Aus der Behauptung folgt direkt, dass für alle $w \in L(G)$ $w^R \in L(G^R)$
- Zeige Behauptung durch Induktion über n
- **Induktionsanfang:** $n = 1$, dann gilt $S \xrightarrow{R_1^R} \delta^R$ nach Konstruktion
- **Induktionsannahme:** Die Behauptung gilt für alle Folgen von Ableitungen der Länge weniger als n

Aufgabe 3

Zeigen oder widerlegen Sie, dass die kontextfreien Sprachen unter Spiegelung abgeschlossen sind.

Lösung:

Induktionsschluss:

- Sei $R_n = (B \rightarrow \beta)$, dann gilt: $\delta = \alpha\beta\gamma$ und $S \xrightarrow{R_1} \dots \xrightarrow{R_{n-1}} \alpha B \gamma$
- nach Induktionsvoraussetzung gilt $S \xrightarrow{R_1^R} \dots \xrightarrow{R_{n-1}^R} \gamma^R B \alpha^R$
- Nach Konstruktion von R^R gilt also
$$S \xrightarrow{R_1^R} \dots \xrightarrow{R_n^R} \gamma^R \beta^R \alpha^R = (\alpha\beta\gamma)^R = \delta^R$$

Aufgabe 3

Zeigen oder widerlegen Sie, dass die kontextfreien Sprachen unter Spiegelung abgeschlossen sind.

Lösung:

- Noch zu zeigen: $L(G^R) \subseteq L(G)^R$
- Der Beweis dafür geht analog zur anderen Richtung, da $(L(G)^R)^R = L(G)$ ist

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass folgende Sprachen nicht kontextfrei sind:

- $L_1 = \{w \in \{a, b, c\}^* : |w|_a = |w|_b = |w|_c\}$, wobei $|w|_x$ für die Häufigkeit des Buchstabens x im Wort w stehe.
- $L_2 = \{a^i b^j c^j \mid j \leq i\}$

Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen

Für jede kontextfreie Sprache L
gibt es eine Konstante $n \in \mathbb{N}$,
so dass sich jedes Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$

so als

- $z = uvwxy$

schreiben lässt, dass

- $|vx| \geq 1$,
- $|vwx| \leq n$ und
- für alle $i \geq 0$ das Wort $uv^iwx^iy \in L$ ist.

Aufgabe 4 a)

Zeigen Sie, dass folgende Sprachen nicht kontextfrei sind:

- $L_1 = \{w \in \{a, b, c\}^* : |w|_a = |w|_b = |w|_c\}$, wobei $|w|_x$ für die Häufigkeit des Buchstabens x im Wort w stehe.

Aufgabe 4 a)

Zeigen Sie, dass folgende Sprachen nicht kontextfrei sind:

- $L_1 = \{w \in \{a, b, c\}^* : |w|_a = |w|_b = |w|_c\}$, wobei $|w|_x$ für die Häufigkeit des Buchstabens x im Wort w stehe.

Lösung:

- Annahme: L_1 ist kontextfrei
- Pumping-Lemma: $\exists n \in \mathbb{N}$, so dass jedes Wort z mit $|z| \geq n$ eine Zerlegung $z = uvwxy$ besitzt mit $|vx| \geq 1$ und $|vwx| \leq n$, so dass $uv^iwx^iy \in L_1$ für alle $i \geq 0$
- Wähle $z = a^n b^n c^n$
- Betrachte eine Zerlegung $z = uvwxy$ gemäß des Pumping-Lemmas

Aufgabe 4 a)

Zeigen Sie, dass folgende Sprachen nicht kontextfrei sind:

- $L_1 = \{w \in \{a, b, c\}^* : |w|_a = |w|_b = |w|_c\}$, wobei $|w|_x$ für die Häufigkeit des Buchstabens x im Wort w stehe.

Lösung:

- $|vwx| \leq n$, d.h. vx kann nicht gleichzeitig a 's und c 's enthalten
- Fall 1: vx enthält keine a 's
 - Falls vx mindestens ein b enthält, dann enthält uv^0wx^0y weniger b 's als a 's
 - Falls vx mindestens ein c enthält, dann enthält uv^0wx^0y weniger c 's als a 's
- Fall 2: vx enthält keine c 's
 - Falls vx mindestens ein b enthält, dann enthält uv^0wx^0y weniger b 's als c 's
 - Falls vx mindestens ein a enthält, dann enthält uv^0wx^0y weniger a 's als c 's
- In allen Fällen ist also uv^0wx^0y nicht in L_1
- Dies ist ein Widerspruch zum Pumping-Lemma

Ogden's Lemma für kontextfreie Sprachen

Für jede kontextfreie Sprache L
gibt es eine Konstante $n \in \mathbb{N}$,
so dass für jedes Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ gilt:

Wenn wir in z mindestens n Buchstaben markieren, so lässt sich z so
als $z = uvwxy$ schreiben,

- dass von den mindestens n markierten Buchstaben
 - mindestens einer zu vx gehört und
 - höchstens n zu vwx gehören und
- für alle $i \geq 0$ das Wort $uv^iwx^iy \in L$ ist.

Aufgabe 4 b)

Zeigen Sie, dass folgende Sprachen nicht kontextfrei sind:

- $L_2 = \{a^i b^j c^j \mid j \leq i\}$

Aufgabe 4 b)

Zeigen Sie, dass folgende Sprachen nicht kontextfrei sind:

- $L_2 = \{a^i b^j c^j \mid j \leq i\}$

Lösung:

- Annahme: L_2 ist kontextfrei
- Wähle n wie in Ogden's Lemma
- Betrachte das Wort $z = a^{n+1} b^{n+1} c^{n+1} \in L_2$ und markiere alle b 's
- Betrachte eine Zerlegung $z = uvwxy$ gemäß Ogden's Lemma, daraus folgt, dass mindestens ein b zu vx gehören muss
- Da höchstens n markierte Buchstaben zu vx gehören dürfen, kann vx nicht gleichzeitig a 's und c 's enthalten
- Fall 1: vx enthält keine a 's. Dann enthält $uv^0 wx^0 y$ weniger b 's als a 's und ist damit nicht in L_2
- Fall 2: vx enthält keine c 's. Dann enthält $uv^0 wx^0 y$ weniger b 's als c 's, ist also nicht in L_2
- Dies ist ein Widerspruch zu Ogden's Lemma

Aufgabe 5

Über dem Alphabet $\Sigma = \{(\,)\}$ ist die Sprache $L_()$ der korrekten Klammerausdrücke gegeben. Ferner ist die Grammatik $G_()$ gegeben, die genau $L_()$ erzeugt. Dabei ist $G_() = (\{(\,)\}, \{S\}, S, R)$ mit

$$R = \{S \rightarrow \epsilon \mid SS \mid (S)\}$$

- Was ist das maximale k , so dass $G_()$ Chomsky-Typ k hat?
- Gibt es eine Grammatik mit Chomsky-Typ $k + 1$, die $L_()$ erzeugt? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Bestimmen Sie eine Grammatik G' für $L_() \setminus \{\epsilon\}$ in Greibach-Normalform

Aufgabe 5 a)

Über dem Alphabet $\Sigma = \{(\,)\}$ ist die Sprache $L()$ der korrekten Klammerausdrücke gegeben. Ferner ist die Grammatik $G()$ gegeben, die genau $L()$ erzeugt. Dabei ist $G() = (\{(\,)\}, \{S\}, S, R)$ mit

$$R = \{S \rightarrow \epsilon \mid SS \mid (S)\}$$

- Was ist das maximale k , so dass $G()$ Chomsky-Typ k hat?

Aufgabe 5 a)

Über dem Alphabet $\Sigma = \{ (,) \}$ ist die Sprache $L_()$ der korrekten Klammerausdrücke gegeben. Ferner ist die Grammatik $G_()$ gegeben, die genau $L_()$ erzeugt. Dabei ist $G_() = (\{ (,) \}, \{ S \}, S, R)$ mit

$$R = \{ S \rightarrow \epsilon \mid SS \mid (S) \}$$

- Was ist das maximale k , so dass $G_()$ Chomsky-Typ k hat?

Lösung:

- $G_()$ ist kontextfrei (Typ 2), denn die linke Seite aller Regeln besteht nur aus einer einzigen Variablen
- $G_()$ ist nicht rechtslinear (Typ 3), da z.B. die rechte Seite der Regel $S \rightarrow SS$ mit einer Variablen beginnt
- Also ist das maximale k , so dass $G_()$ Chomsky-Typ k hat, 2

Aufgabe 5 b)

Über dem Alphabet $\Sigma = \{(\,)\}$ ist die Sprache $L_{()}$ der korrekten Klammerausdrücke gegeben. Ferner ist die Grammatik $G_{()}$ gegeben, die genau $L_{()}$ erzeugt. Dabei ist $G_{()} = (\{(\,)\}, \{S\}, S, R)$ mit

$$R = \{S \rightarrow \epsilon \mid SS \mid (S)\}$$

- Gibt es eine Grammatik mit Chomsky-Typ $k + 1$, die $L_{()}$ erzeugt? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5 b)

Über dem Alphabet $\Sigma = \{ (,) \}$ ist die Sprache $L_{()}$ der korrekten Klammerausdrücke gegeben. Ferner ist die Grammatik $G_{()}$ gegeben, die genau $L_{()}$ erzeugt. Dabei ist $G_{()} = (\{ (,) \}, \{ S \}, S, R)$ mit

$$R = \{ S \rightarrow \epsilon \mid SS \mid (S) \}$$

- Gibt es eine Grammatik mit Chomsky-Typ $k + 1$, die $L_{()}$ erzeugt? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

- k ist zwei, also ist die Frage, ob es eine Typ 3-Grammatik gibt, die genau die Sprache der korrekten Klammerausdrücke erzeugt
- Dies würde bedeuten, dass $L_{()}$ regulär ist
- $L_{()}$ ist aber nicht regulär (siehe Vorlesung), also kann es keine Typ 3-Grammatik geben, die $L_{()}$ erzeugt

Ersetzungsregel (i)

Folgende Ersetzungen ändern nichts an der erzeugten Sprache:

Ersetzung (i). Eine Regel

$$A \rightarrow \alpha_1 B \alpha_2$$

wobei

$$B \rightarrow \beta_1, B \rightarrow \beta_2, \dots, B \rightarrow \beta_r$$

alle Regeln sind, deren linke Seite B ist, kann durch die Regeln

$$A \rightarrow \alpha_1 \beta_1 \alpha_2$$

$$A \rightarrow \alpha_1 \beta_2 \alpha_2$$

...

$$A \rightarrow \alpha_1 \beta_r \alpha_2$$

ersetzt werden.

Ersetzungsregel (ii)

Folgende Ersetzungen ändern nichts an der erzeugten Sprache:

Ersetzung (ii). Seien

$$A \rightarrow A\alpha_1, \dots, A \rightarrow A\alpha_r$$

$$A \rightarrow \beta_1, \dots, A \rightarrow \beta_s$$

alle Regeln, deren linke Seite A ist, wobei β_i nicht mit A beginnen. Dann können die Regeln

$$A \rightarrow A\alpha_1, \dots, A \rightarrow A\alpha_r$$

durch die Regeln

$$A \rightarrow \beta_1 B, \dots, A \rightarrow \beta_s B$$

$$B \rightarrow \alpha_1, \dots, B \rightarrow \alpha_r,$$

$$B \rightarrow \alpha_1 B, \dots, B \rightarrow \alpha_r B$$

²⁴ ersetzt werden. Dabei sei B eine neu eingeführte Variable.

Aufgabe 5 c)

Ausgangsregeln: $S \rightarrow \epsilon \mid SS \mid (S)$

- Finde Grammatik für $L_{()} \setminus \{\epsilon\}$:

$$S \rightarrow SS \mid (S) \mid ()$$

- Forme Grammatik so um, dass Terminale nur am Anfang von rechten Seiten stehen:

$$S \rightarrow SS \mid (SA \mid (A$$

$$A \rightarrow)$$

- Diese Grammatik ist zwar nicht in Chomsky-Normalform, erfüllt aber die Invarianten 1-5 aus dem Konstruktionsbeweis zur Greibach-Normalform

Aufgabe 5 c)

$$\begin{aligned} S &\rightarrow SS \mid (SA \mid (A \\ A &\rightarrow) \end{aligned}$$

- Wende (ii) an, um die Regel $S \rightarrow SS$ zu eliminieren, dadurch entstehen neue Regeln:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow (SAB \mid (AB \\ B &\rightarrow S \mid SB \end{aligned}$$

- Insgesamt also:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow (SA \mid (A \mid (SAB \mid (AB \\ B &\rightarrow S \mid SB \\ A &\rightarrow) \end{aligned}$$

Aufgabe 5 c)

$$S \rightarrow (SA|(A|(SAB|(AB$$

$$B \rightarrow S|SB$$

$$A \rightarrow)$$

- Wende (i) an, um die Regeln $B \rightarrow S$ und $B \rightarrow SB$ zu eliminieren, dadurch entstehen neue Regeln:

$$B \rightarrow (SA|(A|(SAB|(AB$$

$$B \rightarrow (SAB|(AB|(SABB|(ABB$$

- Insgesamt also:

$$S \rightarrow (SA|(A|(SAB|(AB$$

$$B \rightarrow (SA|(A|(SAB|(AB|(SABB|(ABB$$

$$A \rightarrow)$$

Aufgabe 6

Sei $\mathcal{A} = (\{s, q\}, \{a, b\}, \{Y, Z\}, \delta, s, Z, \{q\})$ der Kellerautomat mit der folgenden Übergangsrelation δ :

$$\begin{array}{ll} (s, a, Z) \mapsto (s, YZ), & (s, \epsilon, Z) \mapsto (s, \epsilon) \\ (s, a, Y) \mapsto (s, YY), & (q, a, Y) \mapsto (q, \epsilon) \\ (s, b, Y) \mapsto (q, Y), & (q, b, Z) \mapsto (s, Z) \end{array}$$

- Ist \mathcal{A} deterministisch?
- Dokumentieren Sie eine akzeptierende Berechnung des Wortes *aabaab*.
- Geben Sie die Sprache L_F , die von \mathcal{A} durch einen akzeptierenden Endzustand erkannt wird, an und begründen Sie Ihre Aussage.
- Geben Sie die Sprache L_ϵ , die von \mathcal{A} durch leeren Stack erkannt wird, an und begründen Sie Ihre Aussage.
- Geben Sie eine kontextfreie Grammatik für die Sprache L_ϵ an.

Ein PDA **akzeptiert** ein $w \in \Sigma^*$ **durch leeren Stack**, wenn es eine zulässige Folge von Konfigurationen aus der Anfangskonfiguration (q_0, w, Z_0) in eine Konfiguration $(q, \varepsilon, \varepsilon)$, $q \in Q$, gibt.

Ein PDA **akzeptiert** ein $w \in \Sigma^*$ **durch einen akzeptierenden Endzustand**, wenn es eine zulässige Folge von Konfigurationen aus der Anfangskonfiguration (q_0, w, Z_0) in eine Konfiguration (q, ε, γ) mit $q \in F$ und $\gamma \in \Gamma^*$ gibt.

Ein PDA ist **deterministisch** (DPDA), falls

$$|\delta(q, a, Z)| + |\delta(q, \varepsilon, Z)| \leq 1$$

für alle $q \in Q$, $a \in \Sigma$, $Z \in \Gamma$.

Aufgabe 6 a)

Sei $\mathcal{A} = (\{s, q\}, \{a, b\}, \{Y, Z\}, \delta, s, Z, \{q\})$ der Kellerautomat mit der folgenden Übergangsrelation δ :

$$\begin{array}{llll} (s, a, Z) & \mapsto & (s, YZ), & (s, \epsilon, Z) & \mapsto & (s, \epsilon) \\ (s, a, Y) & \mapsto & (s, YY), & (q, a, Y) & \mapsto & (q, \epsilon) \\ (s, b, Y) & \mapsto & (q, Y), & (q, b, Z) & \mapsto & (s, Z) \end{array}$$

Ist \mathcal{A} deterministisch?

Aufgabe 6 a)

Sei $\mathcal{A} = (\{s, q\}, \{a, b\}, \{Y, Z\}, \delta, s, Z, \{q\})$ der Kellerautomat mit der folgenden Übergangsrelation δ :

$$\begin{array}{llll} (s, a, Z) & \mapsto & (s, YZ), & (s, \epsilon, Z) & \mapsto & (s, \epsilon) \\ (s, a, Y) & \mapsto & (s, YY), & (q, a, Y) & \mapsto & (q, \epsilon) \\ (s, b, Y) & \mapsto & (q, Y), & (q, b, Z) & \mapsto & (s, Z) \end{array}$$

Ist \mathcal{A} deterministisch?

Lösung:

Nein, \mathcal{A} ist nicht deterministisch, denn $|\delta(s, a, Z)| + |\delta(s, \epsilon, Z)| > 1$

Aufgabe 6 b)

Sei $\mathcal{A} = (\{s, q\}, \{a, b\}, \{Y, Z\}, \delta, s, Z, \{q\})$ der Kellerautomat mit der folgenden Übergangsrelation δ :

$$\begin{array}{llll} (s, a, Z) & \mapsto & (s, YZ), & (s, \epsilon, Z) & \mapsto & (s, \epsilon) \\ (s, a, Y) & \mapsto & (s, YY), & (q, a, Y) & \mapsto & (q, \epsilon) \\ (s, b, Y) & \mapsto & (q, Y), & (q, b, Z) & \mapsto & (s, Z) \end{array}$$

Dokumentieren Sie eine akzeptierende Berechnung des Wortes *abaab*.
Geben Sie dazu für jeden Schritt die aktuelle Konfiguration an.

Aufgabe 6 b)

Sei $\mathcal{A} = (\{s, q\}, \{a, b\}, \{Y, Z\}, \delta, s, Z, \{q\})$ der Kellerautomat mit der folgenden Übergangsrelation δ :

$$\begin{array}{ll} (s, a, Z) \mapsto (s, YZ), & (s, \epsilon, Z) \mapsto (s, \epsilon) \\ (s, a, Y) \mapsto (s, YY), & (q, a, Y) \mapsto (q, \epsilon) \\ (s, b, Y) \mapsto (q, Y), & (q, b, Z) \mapsto (s, Z) \end{array}$$

Dokumentieren Sie eine akzeptierende Berechnung des Wortes *abaab*. Geben Sie dazu für jeden Schritt die aktuelle Konfiguration an.

Lösung:

- $(s, aabaab, Z)$
- $(s, abaab, YZ)$
- $(s, baab, YYZ)$
- (q, aab, YYZ)
- (q, ab, YZ)
- (q, b, Z)
- (s, ϵ, Z)
- (s, ϵ, ϵ)

Aufgabe 6 c)

Sei $\mathcal{A} = (\{s, q\}, \{a, b\}, \{Y, Z\}, \delta, s, Z, \{q\})$ der Kellerautomat mit der folgenden Übergangsrelation δ :

$$\begin{array}{ll} (s, a, Z) \mapsto (s, YZ), & (s, \epsilon, Z) \mapsto (s, \epsilon) \\ (s, a, Y) \mapsto (s, YY), & (q, a, Y) \mapsto (q, \epsilon) \\ (s, b, Y) \mapsto (q, Y), & (q, b, Z) \mapsto (s, Z) \end{array}$$

Geben Sie die Sprache L_F , die von \mathcal{A} durch einen akzeptierenden Endzustand erkannt wird, an und begründen Sie Ihre Aussage. Ein formaler Beweis ist hierzu nicht nötig.

Aufgabe 6 c)

Geben Sie die Sprache L_F , die von \mathcal{A} durch einen akzeptierenden Endzustand erkannt wird, an und begründen Sie Ihre Aussage. Ein formaler Beweis ist hierzu nicht nötig.

Aufgabe 6 c)

Geben Sie die Sprache L_F , die von \mathcal{A} durch einen akzeptierenden Endzustand erkannt wird, an und begründen Sie Ihre Aussage. Ein formaler Beweis ist hierzu nicht nötig.

Lösung:

- Im Zustand s wird für jedes a ein Y auf den Stack gelegt und in Zustand q wird für jedes a ein Y vom Stack genommen
- Der Kellerautomat befindet sich immer abwechselnd in Zustand s und q
- Wie sieht das Suffix eines Wortes aus, dessen Abarbeitung in q endet?
- Betrachte die Konfigurationsfolge, nachdem das letzte Mal von q nach s gewechselt wurde
- Wenn von q nach s gewechselt wird, ist dies mit der Regel $(q, b, Z) \mapsto (s, Z)$, es liegt also danach nur Z auf dem Stack

Aufgabe 6 c)

Geben Sie die Sprache L_F , die von \mathcal{A} durch einen akzeptierenden Endzustand erkannt wird, an und begründen Sie Ihre Aussage. Ein formaler Beweis ist hierzu nicht nötig.

Lösung:

- Wenn nur Z auf dem Stack liegt, dann wird nach q gewechselt durch einlesen von $a^i b$ mit $i > 0$
- Der Kellerautomat bleibt dann in Zustand q , solange höchstens i a 's eingelesen werden, also wenn das Suffix des Wortes von der Form $a^i b a^j$ mit $i > 0, j \leq i$ ist

Aufgabe 6 c)

Geben Sie die Sprache L_F , die von \mathcal{A} durch einen akzeptierenden Endzustand erkannt wird, an und begründen Sie Ihre Aussage. Ein formaler Beweis ist hierzu nicht nötig.

Lösung:

- Was kann vor diesem Suffix kommen?
- Zuvor kann beliebig oft von s nach q und wieder zurück gewechselt werden
- Von q nach s gewechselt werden kann nur, wenn gleich viele a 's eingelesen werden wie zuvor in Zustand s
- Insgesamt kann also beliebig oft ein Wort der Form $a^i b a^i b$ mit $i > 0$ eingelesen werden
- Sei $L = \{a^i b a^i b \mid i > 0\}$
- Dann ist $L_f = L^* \cdot \{a^i b a^i \mid i > 0, j \leq i\}$

Aufgabe 6 d)

Sei $\mathcal{A} = (\{s, q\}, \{a, b\}, \{Y, Z\}, \delta, s, Z, \{q\})$ der Kellerautomat mit der folgenden Übergangsrelation δ :

$$\begin{array}{llll} (s, a, Z) & \mapsto & (s, YZ), & (s, \epsilon, Z) & \mapsto & (s, \epsilon) \\ (s, a, Y) & \mapsto & (s, YY), & (q, a, Y) & \mapsto & (q, \epsilon) \\ (s, b, Y) & \mapsto & (q, Y), & (q, b, Z) & \mapsto & (s, Z) \end{array}$$

Geben Sie die Sprache L_ϵ , die von \mathcal{A} durch leeren Stack erkannt wird, an und begründen Sie Ihre Aussage. Ein formaler Beweis ist hierzu nicht nötig.

Aufgabe 6 d)

Sei $\mathcal{A} = (\{s, q\}, \{a, b\}, \{Y, Z\}, \delta, s, Z, \{q\})$ der Kellerautomat mit der folgenden Übergangsrelation δ :

$$\begin{array}{ll} (s, a, Z) \mapsto (s, YZ), & (s, \epsilon, Z) \mapsto (s, \epsilon) \\ (s, a, Y) \mapsto (s, YY), & (q, a, Y) \mapsto (q, \epsilon) \\ (s, b, Y) \mapsto (q, Y), & (q, b, Z) \mapsto (s, Z) \end{array}$$

Geben Sie die Sprache L_ϵ , die von \mathcal{A} durch leeren Stack erkannt wird, an und begründen Sie Ihre Aussage. Ein formaler Beweis ist hierzu nicht nötig.

Lösung:

- Der Stack kann nur geleert werden, wenn sich der Kellerautomat in Zustand s befindet und keine Y 's auf dem Stack liegen
- Wie bei Teilaufgabe c) überlegt, ist dies genau am Anfang der Fall und wenn beliebig oft ein Wort der Form $a^i b a^i b$ mit $i > 0$ eingelesen wird
- Sei $L = \{a^i b a^i b \mid i > 0\}$, dann ist L_ϵ also genau L^*

Aufgabe 6 e)

Geben Sie eine kontextfreie Grammatik für die Sprache L_ϵ an.

Aufgabe 6 e)

Geben Sie eine kontextfreie Grammatik für die Sprache L_ϵ an.

Lösung:

- Theoretisch möglich mit Tripelkonstruktion
- Die Sprache ist jedoch hinreichend einfach, so dass direkt eine Grammatik angegeben werden kann
- $L_\epsilon = L^*$ mit $L = \{a^i b a^i b \mid i > 0\}$
- Kontextfreie Grammatik $G = (\{a, b\}, \{S, B\}, S, R')$ für L :

$$R' = \{S \rightarrow aBab, B \rightarrow aBa \mid b\}$$

- Kontextfreie Grammatik $G = (\{a, b\}, \{S, B\}, S, R)$ für L_ϵ :

$$R = \{S \rightarrow \epsilon \mid SS \mid aBab, B \rightarrow aBa \mid b\}$$

Zusatzaufgabe:

- Zeigen Sie, dass die Sprache

$$L = \{a^i b^j c^k d^l \mid i = 0 \vee j = k = l\}$$

die notwendige Bedingung des Pumping-Lemmas für Kontextfreiheit erfüllt.

- Beweisen Sie die Nicht-Kontextfreiheit von L .

Zusatzaufgabe:

Zeigen Sie, dass die Sprache

$$L = \{a^i b^j c^k d^l \mid i = 0 \vee j = k = l\}$$

die notwendige Bedingung des Pumping-Lemmas für Kontextfreiheit erfüllt.

Zusatzaufgabe:

Zeigen Sie, dass die Sprache

$$L = \{a^i b^j c^k d^l \mid i = 0 \vee j = k = l\}$$

die notwendige Bedingung des Pumping-Lemmas für Kontextfreiheit erfüllt.

Lösung:

- Zu zeigen ist, dass es eine Konstante n gibt, so dass sich jedes Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ so als $z = uvwxy$ schreiben lässt, dass $|vx| \geq 1$, $|vwx| \leq n$ und für alle $i \geq 0$ das Wort $uv^i wx^i y \in L$ ist.
- Wir können die Aussage sogar für $n = 1$ zeigen
- Sei z ein beliebiges Wort in L mit $|z| \geq 1$
- Fall 1: $i = 0$
 - Dann ist z von der Form $b^j c^k d^l$
 - Zerlege z in $z = vy$ mit $|v| = 1$ (d.h. $u, w, x = \varepsilon$)
 - Es gilt $|vx| > 0$ und $|vwx| \leq 1$ und für beliebige i ist $uv^i wx^i z = v^i y$ von der Form $b^m c^n d^o$ und damit in L

Zusatzaufgabe:

Zeigen Sie, dass die Sprache

$$L = \{a^i b^j c^k d^l \mid i = 0 \vee j = k = l\}$$

die notwendige Bedingung des Pumping-Lemmas für Kontextfreiheit erfüllt.

Lösung:

- Fall 2: $i > 0$
 - Dann ist z von der Form $a^i b^j c^l d^l$ mit $i > 0$
 - Zerlege z in $z = vy$ mit $|v| = 1$ (d.h. $u, w, x = \varepsilon$)
 - Es gilt $|vx| > 0$ und $|vwx| \leq 1$ und für beliebige i ist $uv^i wx^i z = v^i y$ von der Form $a^m b^j c^l d^l$ und damit in L
- Also kann für jedes Wort $z \in L$ mit $|z| \geq 1$ eine Zerlegung gemäß des Pumping-Lemmas angegeben werden

Zusatzaufgabe:

Beweisen Sie die Nicht-Kontextfreiheit von L .

Zusatzaufgabe:

Beweisen Sie die Nicht-Kontextfreiheit von L .

Lösung:

- Annahme: L ist kontextfrei
- Wähle n wie in Ogden's Lemma
- Wähle $z = ab^{n+1}c^{n+1}d^{n+1}$ und markiere alle c 's
- Sei $z = uvwxy$ eine Zerlegung von z gemäß Ogden's Lemma
- Dann kann vx nicht gleichzeitig b 's und d 's enthalten
- Nach Voraussetzung enthält vx min. einen markierten Buchstaben, also mindestens ein c
- Fall 1: vx enthält keine b 's, dann enthält uv^2wx^2z mehr c 's als b 's (und es ist min. ein a enthalten)
- Fall 2: vx enthält keine d 's, dann enthält uv^2wx^2z mehr c 's als d 's (und es ist min. ein a enthalten)
- Beides ist ein Widerspruch zu Ogden's Lemma