Informatik III

WS 03/04

Prof. Dr. Dorothea Wagner

`dwagner@ira.uka.de`

Kapitel 3 : Turing–Maschine, Berechenbarkeit

Die Turing–Maschine

3.1 Definition

Eine deterministische Turing-Maschine ((D)TM) besteht aus:

- Q, *einer endlicher Zustandsmenge,*
- Σ, *einem endlichen Eingabealphabet,*
- $\sqcup$, *einem Blanksymbol mit* $\sqcup \notin \Sigma$,
- Γ, *einem endlichen Bandalphabet mit* $\Sigma \cup \{\sqcup\} \subseteq \Gamma$,

Die Turing–Maschine

- $\delta\colon Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R, N\}$, *einer Übergangsfunktion.*
  Dabei bedeutet L *eine Bewegung des Lese-/Schreibkopfes nach links,* R *eine Bewegung nach rechts und* N *ein Stehenbleiben. Die Übergangsfunktion beschreibt, wie das aktuell eingelesene Zeichen verarbeitet werden soll.*
- $F \subseteq Q$, *einer Menge von Endzuständen.*
  Die Menge der Endzustände kann auch entfallen.

Die Turing–Maschine

3.2 Bemerkung

- Der Übergang $\delta(q, a) = (p, b, L)$ wird graphisch folgendermassen dargestellt:

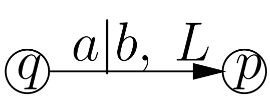

Abbildung 1: Übergang von Zustand q nach p

Bedeutung: Ist die Turing-Maschine im Zustand q und liest das Symbol a, so überschreibt sie dieses a mit b, geht auf dem Band eine Stelle nach links und wechselt in den Zustand p.

Die Turing–Maschine

- Die Turing-Maschine startet im Zustand s, wobei der Lese-/Schreibkopf an der linkesten Stelle des Bandes, in der ein Eingabesymbol steht, positioniert ist. (Konvention)
- Die Turing-Maschine stoppt, wenn sie zum ersten Mal in einen Endzustand kommt oder in einem Zustand q ein Symbol a liest und $\delta(q,a) = (q,a,N)$ ist. Das bedeutet insbesondere, daß Übergänge, die aus Endzuständen herausführen, sinnlos sind.

Die Turing–Maschine

3.3 Definition
Eine Turing-Maschine ***akzeptiert*** *eine Eingabe $w \in \Sigma^*$, wenn sie nach Lesen von w in einem Zustand aus F stoppt. Sie* ***akzeptiert*** *eine Sprache L genau dann, wenn sie ausschließlich Wörter aus $w \in L$ als Eingabe akzeptiert.*

3.4 Definition

1. *Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt **rekursiv** oder **entscheidbar**, wenn es eine Turing-Maschine gibt, die auf allen Eingaben stoppt und eine Eingabe w genau dann akzeptiert, wenn $w \in L$ gilt.*

2. *Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt **rekursiv-aufzählbar** oder **semi-entscheidbar**, wenn es eine Turing-Maschine gibt, die genau die Eingaben w akzeptiert für die $w \in L$. Das Verhalten der Turing-Maschine für Eingaben $w \notin L$ ist damit nicht definiert. Das bedeutet, dass die Turing-Maschine entweder nicht in einem Endzustand stoppt oder dass sie gar nicht stoppt.*

3.5 Definition

1. *Eine Funktion $f\colon \Sigma^* \longrightarrow \Gamma^*$ heißt* ***(Turing-)berechenbar*** *oder* ***totalrekursiv****, wenn es eine Turing-Maschine gibt, die bei Eingabe von $w \in \Sigma^*$ den Funktionswert $f(w) \in \Gamma^*$ ausgibt.*

2. *Eine Turing-Maschine* ***realisiert*** *eine Funktion $f\colon \Sigma^* \longrightarrow \Gamma^*$, falls gilt:*

$$f(w) = \begin{cases} \text{Ausgabe der TM, wenn sie bei Eingabe } w \text{ stoppt} \\ \text{undefiniert sonst} \end{cases}$$

Die Turing–Maschine

3.6 Korollar

- *Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist* ***entscheidbar*** *genau dann, wenn ihre* ***charakteristische Funktion*** *χ_L berechenbar ist, wobei gilt:*

$$\chi_L\colon \Sigma^* \longrightarrow \{0,1\} \quad \text{mit} \qquad \chi_L(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \in L \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Turing–Maschine

- *Eine Sprache L ist* ***semientscheidbar*** *genau dann, wenn die Funktion χ_L^* berechenbar ist, wobei gilt:*

$$\chi_L^*(w) = \begin{cases} 1 & \textit{falls } w \in L \\ \textit{undefiniert} & \textit{sonst} \end{cases}$$

Die universelle TM und unentscheidbare Probleme

3.7 Definition
Sei $\mathcal{M} := (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$ eine Turing-Maschine. Die Gödelnummer von $\mathcal{M}$, bezeichnet als $\langle \mathcal{M} \rangle$, ist definiert durch folgende Kodierungsvorschrift:

1. *Kodiere $\delta(q_i, a_j) = (q_r, a_s, d_t)$ durch*
   $0^i\,1\,0^j\,1\,0^r\,1\,0^s\,1\,0^t$,
   wobei $d_t \in \{d_1, d_2, d_3\}$ und d_1 für L, d_2 für R und d_3 für N steht.

2. *Die Turing-Maschine wird dann kodiert durch:*

$$111\mathit{code}_1 11\mathit{code}_2 11 \ldots 11\mathit{code}_z 111,$$

wobei code_i *für* $i = 1, \ldots, z$ *alle Funktionswerte von* δ *in beliebiger Reihenfolge beschreibt.*

Die universelle TM und unentscheidbare Probleme

3.8 Definition
Zu $w \in \{0,1\}^*$ *sei* $\boldsymbol{T_w}$ *die Turing-Maschine mit der Gödelnummer (GN)* w*, beziehungsweise die Turing-Maschine, die* $\emptyset$ *akzeptiert (d.h.* T_w *stoppt nie, wenn* w *keine Gödelnummer ist).* $\boldsymbol{L(T_w)}$ *ist die Sprache, die von* T_w *akzeptiert wird.*

Die **Diagonalsprache** *ist definiert durch*

$$L_d := \{w_i \mid \mathcal{M}_i \text{ akzeptiert } w_i \text{ nicht}\} ,$$

wobei w_i das i-te Wort bei kanonischer Reihenfolge aller Wörter aus $(0 \cup 1)^*$ ist und $\mathcal{M}_i$ die Turing-Maschine ist, welche durch w_i codiert ist.

Die universelle TM und unentscheidbare Probleme

3.9 Satz
Die Sprache L_d ist nicht entscheidbar.

3.10 Korollar
Die Sprache $L_d^c := \{0,1\}^* \backslash L_d$ ist nicht entscheidbar.

3.11 Definition (Halteproblem)
*Das **Halteproblem** definiert folgende Sprache*

$$\mathcal{H} := \{wv \mid T_w \text{ hält auf der Eingabe } v\}\,.$$

3.12 Satz
$\mathcal{H}$ ist nicht entscheidbar.

Die universelle TM und unentscheidbare Probleme

3.13 Definition
*Die **universelle Sprache** L_u über $\{0,1\}$ ist definiert durch*

$$L_u := \{wv \mid v \in L(T_w)\}\,.$$

L_u ist also die Menge aller Wörter wv für die T_w bei der Eingabe v hält und v akzeptiert.

3.14 Satz
Die Sprache L_u ist nicht entscheidbar.

3.15 Satz
Die Sprache L_u ist semi-entscheidbar.

3.16 Satz (Satz von Rice)
Sei R die Menge der von Turing-Maschinen berechenbaren Funktionen und S eine nicht-triviale Teilmenge von R ($\emptyset \neq S \neq R$). Dann ist die Sprache

$$L(S) := \{\langle \mathcal{M} \rangle \mid \mathcal{M} \text{ berechnet eine Funktion aus } S\}$$

nicht entscheidbar.

3.17 Satz

Das Post'sche Korrespondezproblem ist nicht entscheidbar.