



Informatik III

WS 03/04

Prof. Dr. Dorothea Wagner

`dwagner@ira.uka.de`

Kapitel 3 : Turing–Maschine, Berechenbarkeit

Die Turing-Maschine

3.1 Definition

Eine deterministische Turing-Maschine ((D)TM) besteht aus:

- Q , einer endlicher Zustandsmenge,
- Σ , einem endlichen Eingabealphabet,
- \sqcup , einem Blanksymbol mit $\sqcup \notin \Sigma$,
- Γ , einem endlichen Bandalphabet mit $\Sigma \cup \{\sqcup\} \subseteq \Gamma$,

Die Turing-Maschine

- $\delta: Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R, N\}$, einer Übergangsfunktion.

Dabei bedeutet L eine Bewegung des Lese-/Schreibkopfes nach links, R eine Bewegung nach rechts und N ein Stehenbleiben. Die Übergangsfunktion beschreibt, wie das aktuell eingelesene Zeichen verarbeitet werden soll.

- $F \subseteq Q$, einer Menge von Endzuständen.

Die Menge der Endzustände kann auch entfallen.

Die Turing-Maschine

3.2 Bemerkung

- Der Übergang $\delta(q, a) = (p, b, L)$ wird graphisch folgendermassen dargestellt:

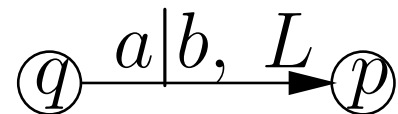


Abbildung 1: Übergang von Zustand q nach p

Bedeutung: Ist die Turing-Maschine im Zustand q und liest das Symbol a , so überschreibt sie dieses a mit b , geht auf dem Band eine Stelle nach links und wechselt in den Zustand p .

Die Turing-Maschine

- Die Turing-Maschine startet im Zustand s , wobei der Lese-/Schreibkopf an der linkesten Stelle des Bandes, in der ein Eingabesymbol steht, positioniert ist.
(Konvention)
- Die Turing-Maschine stoppt, wenn sie zum ersten Mal in einen Endzustand kommt oder in einem Zustand q ein Symbol a liest und $\delta(q, a) = (q, a, N)$ ist. Das bedeutet insbesondere, daß Übergänge, die aus Endzuständen herausführen, sinnlos sind.

Die Turing-Maschine

3.3 Definition

*Eine Turing-Maschine **akzeptiert** eine Eingabe $w \in \Sigma^*$, wenn sie nach Lesen von w in einem Zustand aus F stoppt. Sie **akzeptiert** eine Sprache L genau dann, wenn sie ausschließlich Wörter aus $w \in L$ als Eingabe akzeptiert.*

Die Turing-Maschine

3.4 Definition

1. Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt **rekursiv** oder **entscheidbar**, wenn es eine Turing-Maschine gibt, die auf allen Eingaben stoppt und eine Eingabe w genau dann akzeptiert, wenn $w \in L$ gilt.

Die Turing-Maschine

2. Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt **rekursiv-aufzählbar** oder **semi-entscheidbar**, wenn es eine Turing-Maschine gibt, die genau die Eingaben w akzeptiert für die $w \in L$. Das Verhalten der Turing-Maschine für Eingaben $w \notin L$ ist damit nicht definiert. Das bedeutet, dass die Turing-Maschine entweder nicht in einem Endzustand stoppt oder dass sie gar nicht stoppt.

Die Turing-Maschine

3.5 Definition

1. Eine Funktion $f : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$ heißt **(Turing-)berechenbar** oder **totalrekursiv**, wenn es eine Turing-Maschine gibt, die bei Eingabe von $w \in \Sigma^*$ den Funktionswert $f(w) \in \Gamma^*$ ausgibt.

2. Eine Turing-Maschine **realisiert** eine Funktion $f : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$, falls gilt:

$$f(w) = \begin{cases} \text{Ausgabe der TM, wenn sie bei Eingabe } w \text{ stoppt} \\ \text{undefiniert sonst} \end{cases}$$

Die Turing-Maschine

3.6 Korollar

- Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist **entscheidbar** genau dann, wenn ihre **charakteristische Funktion** χ_L berechenbar ist, wobei gilt:

$$\chi_L: \Sigma^* \rightarrow \{0, 1\} \quad \text{mit} \quad \chi_L(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \in L \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Turing-Maschine

- Eine Sprache L ist **semientscheidbar** genau dann, wenn die Funktion χ_L^* berechenbar ist, wobei gilt:

$$\chi_L^*(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \in L \\ \text{undefiniert} & \text{sonst} \end{cases}$$

Die universelle TM und unentscheidbare Probleme

3.7 Definition

Sei $\mathcal{M} := (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$ eine Turing-Maschine. Die Gödelnummer von \mathcal{M} , bezeichnet als $\langle \mathcal{M} \rangle$, ist definiert durch folgende Kodierungsvorschrift:

1. Kodiere $\delta(q_i, a_j) = (q_r, a_s, d_t)$ durch
 $0^i 1 0^j 1 0^r 1 0^s 1 0^t$,
wobei $d_t \in \{d_1, d_2, d_3\}$ und d_1 für L , d_2 für R und d_3 für N steht.

Die universelle TM und unentscheidbare Probleme

2. *Die Turing-Maschine wird dann kodiert durch:*

$$111code_111code_211 \dots 11code_z111,$$

wobei $code_i$ für $i = 1, \dots, z$ alle Funktionswerte von δ in beliebiger Reihenfolge beschreibt.

Die universelle TM und unentscheidbare Probleme

3.8 Definition

Zu $w \in \{0, 1\}^*$ sei T_w die Turing-Maschine mit der Gödelnummer (GN) w , beziehungsweise die Turing-Maschine, die \emptyset akzeptiert (d.h. T_w stoppt nie, wenn w keine Gödelnummer ist). $L(T_w)$ ist die Sprache, die von T_w akzeptiert wird.

Die universelle TM und unentscheidbare Probleme

Die Diagonalsprache ist definiert durch

$$L_d := \{w_i \mid \mathcal{M}_i \text{ akzeptiert } w_i \text{ nicht}\},$$

wobei w_i das i -te Wort bei kanonischer Reihenfolge aller Wörter aus $(0 \cup 1)^$ ist und \mathcal{M}_i die Turing-Maschine ist, welche durch w_i codiert ist.*

Die universelle TM und unentscheidbare Probleme

3.9 Satz

Die Sprache L_d ist nicht entscheidbar.

3.10 Korollar

Die Sprache $L_d^c := \{0, 1\}^ \setminus L_d$ ist nicht entscheidbar.*

Die universelle TM und unentscheidbare Probleme

3.11 Definition (Halteproblem)

Das *Halteproblem* definiert folgende Sprache

$$\mathcal{H} := \{wv \mid T_w \text{ hält auf der Eingabe } v\}.$$

3.12 Satz

\mathcal{H} ist nicht entscheidbar.

Die universelle TM und unentscheidbare Probleme

3.13 Definition

Die universelle Sprache L_u über $\{0, 1\}$ ist definiert durch

$$L_u := \{wv \mid v \in L(T_w)\}.$$

L_u ist also die Menge aller Wörter wv für die T_w bei der Eingabe v hält und v akzeptiert.

Die universelle TM und unentscheidbare Probleme

3.14 Satz

Die Sprache L_u ist nicht entscheidbar.

3.15 Satz

Die Sprache L_u ist semi-entscheidbar.

Die universelle TM und unentscheidbare Probleme

3.16 Satz (Satz von Rice)

Sei R die Menge der von Turing-Maschinen berechenbaren Funktionen und S eine nicht-triviale Teilmenge von R ($\emptyset \neq S \neq R$). Dann ist die Sprache

$$L(S) := \{ \langle \mathcal{M} \rangle \mid \mathcal{M} \text{ berechnet eine Funktion aus } S \}$$

nicht entscheidbar.

Die universelle TM und unentscheidbare Probleme

3.17 Satz

Das Post'sche Korrespondenzproblem ist nicht entscheidbar.