Universität Karlsruhe
Institut für Algorithmen und Kognitive Systeme
Prof. Dr. Jacques Calmet
Dipl.-Math. Ralf Eberhardt
Dipl.-Inform. Regine Endsuleit

Lösungen zu Übungsblatt Nr. 9

Informatik II
Sommersemester 2005

Aufgabe 1 **?**

Graphen und Relationen

Gegeben sei der gerichtete Graph $G = (\{a, b, c, d, e, f, \}, \{((a, c), (a, e), (b, e), (c, b), (d, b), (f, c), (f, e)\})$. Der Graph beschreibt eine Relation R.

a) Geben Sie die Eigenschaften der Relation R an.

b) Stellen Sie den Graphen als Adjazenzmatrix dar und berechnen Sie sowohl die transitive Hülle R^+ als auch die reflexive transitive Hülle R^* mit Hilfe der Adjazenzmatrix.

c) Berechnen Sie eine minimal erzeugende Relation S für R, d.h. $S^* = R^*$ und die Anzahl der Kanten in S ist minimal.

Wiederholung und Definitionen:

- Eine Teilmenge $R \subseteq M \times M$ heißt *Relation* auf der Menge M. Eine Relation heißt
  - reflexiv, wenn gilt: $\forall x \in M : (x, x) \in R$
  - symmentrisch, wenn gilt: $\forall x, y \in M : (x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R$
  - transitiv, wenn gilt: $\forall x, y, z \in M : ((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R) \rightarrow (x, z) \in R$
  - antisymmetrisch, wenn gilt: $\forall x, y \in M : ((x, y) \in R \wedge (y, x \in R) \rightarrow x = y$
  - azyklisch, wenn gilt: $\nexists x_1, \ldots, x_n \in M : (x_1, x_2) \in R \wedge (x_2, x_3) \in R \wedge \ldots \wedge (x_n, x_1) \in R$
- Eine minimale Erweiterung einer Relation R, mit der Eigenschaft, daß die resultierende Relation transitiv ist, heißt *transitive Hülle* R^+ von R. Analog wird die reflexive, transitive Hülle R^* definiert.
- Die Adjazenzmatrix ist eine Matrix, deren Zeilen und Spalten mit den Knoten eines Graphen indiziert ist und bei der an der Stelle i, j genau dann eine 1 steht, wenn die Kante (i, j) im Graphen enthalten ist, 0 sonst.

Lösung zu Aufgabe 1

a) azyklisch, irreflexiv, asymetrisch, nicht transitiv

b)

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad R^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 **?**

Produkt von Relationen

Das Produkt zweier Relationen R_1 und R_2 über einer Menge A ist definiert als

$$R_1 \cdot R_2 := \{(a,c) \in R^2 \mid \exists b((a,b) \in R_1 \wedge (b,c) \in R_2)\}$$

weiterhin ist definiert

$$R^0 := id_A$$
$$R^{n+1} := R \cdot R^n$$
$$R^* := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R^n$$

a) Berechnen Sie

$$\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\} \cdot \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)\}$$

und

$$\{(a,6a) \in \mathbb{N}^2\} \cdot \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid y = 7x\}$$

b) Beweisen Sie

$$R_1^* \cdot R_2 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (R_1^n \cdot R_2)$$

Lösung zu Aufgabe 2

a)
$$\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$$
und
$$\{(x,42x) \mid x \in \mathbb{N}^2\}$$

b)
$$\begin{aligned}
(a,c) \in R_1^* \cdot R_2 \quad &\Leftrightarrow \quad \exists b((a,b) \in R_1^* \wedge (b,c) \in \ R_2) \\
&\Leftrightarrow \quad \exists b \left((a,b) \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \wedge (b,c) \in \ R_2 \right) \\
&\Leftrightarrow \quad \exists b((\exists n (a,b) \in R_1^n) \wedge (b,c) \in \ R_2) \\
&\Leftrightarrow \quad \exists n \exists b((a,b) \in R_1^n \wedge (b,c) \in \ R_2) \\
&\Leftrightarrow \quad \exists n (a,c) \in (R_1^n \cdot R_2) \\
&\Leftrightarrow \quad (a,c) \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (R_1^n \cdot R_2)
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 **?**

Denksport

Auf einem internationalen Kongress mit 70 Teilnehmern stellt sich heraus, daß für je zwei Teilnehmer A und B gilt, daß A mindestens eine Sprache spricht, die B nicht spricht, und B mindestens eine Sprache spricht, die A nicht spricht.

Bestimmen Sie die kleinste Anzahl von Sprachen, die von diesen 70 Teilnehmern insgesamt mindestens gesprochen werden.

Lösung zu Aufgabe 3

Jeder Teilnehmer spricht mindestens 4 Sprachen und es werden insgesammt 8 Sprachen gesprochen, denn es ist $70 = \binom{8}{4}$.

Eine ausführlichere Lösung wird nachgeliefert.

Aufgabe 4 **?**

Happy, Haskell

a) Erweitern Sie den Parser vom letzten Übungsblatt um die Implikation `->` und die Äquivalenz `<->`.

b) Implementieren Sie eine `show` Funktion für Ihren Datentyp `Formel`, so daß die ausgegebene Formel mit den Terminalzeichen der Grammatik in `Term.y` dargestellt wird.

c) Bringen Sie ihren Datentyp `Formel` in bereinigte Form. Schreiben Sie hierzu eine Funktion `bereinige`.

d) Wandeln Sie eine bereinigte Formel in Pränex-Form. Die Funktion soll `praenex` heißen.

e) Inplementierem Sie nun die Funktion `skolem`, die zu einer bereinigten Formel in Pränexform eine zugehöhrige Skolemform berechnet.