

Aufgabe 1

1+1+2=4 T

Prädikatenlogik

- a) Geben Sie zu der Formel

$$F = (P(x, y) \wedge \forall x (\neg(Q(x) \vee \forall y R(x, y))))$$

die bereinigte Pränex-Normalform an.

- b) Suchen Sie eine Skolem-Normalform $SkNF(F)$ zu der Formel

$$F = \exists u \forall x \forall y \exists v P(x, f(y, u, v), u, g(y), z).$$

- c) Beweisen Sie, daß sich aus der folgenden Klauselmengende nicht die leere Klausel ableiten läßt.

$$\{\{P(x), \neg Q(y)\}, \{\neg P(a), Q(b)\}\}$$

Aufgabe 2

2+2+4=8 T

Formalisieren in Prädikatenlogik

Gegeben Sei die folgende Teil-Interpretation einer Formel:

$$\begin{aligned} I_A(P) &= \{(x, x) \mid x \in U_A\} \\ I_A(Q) &= A \subset U_A \\ I_A(R) &= B \subset U_A := A \setminus \{x\} \\ I_A(f) &= f \text{ ist eine Abbildung } f : A \rightarrow B \end{aligned}$$

Geben Sie PL-Formeln an, deren Interpretationen die folgenden Aussagen implizieren:

- f ist injektiv.
- f ist surjektiv.
- A enthält unendlich viele Elemente.

Aufgabe 3

1+1+1+1+2=6 T

O-Kalkül

Gelten die folgenden Aussagen? Beweisen Sie Ihre Antwort!

- $O(n) = O(\sqrt{n})$.
- $O(\log_2 n) = O(\log_3 n)$.
- $O(af(n)) = O(f(n))$.
- $O(2^n) = O(3^n)$.
- $O(f) \cdot O(g) = O(f \cdot g)$

Aufgabe 4

1+2+1+3=7 R

Haskell, Analyse von Rekurrenzen, Generierende Funktionen

Das Ziel dieser Aufgabe ist es, Ihnen eine Reihe nützlicher Funktionen zur Analyse von Rekurrenzen zur Verfügung zu stellen. Geben Sie bei jeder Funktion, die Sie implementieren auch eine gültige Signatur der Funktion an.

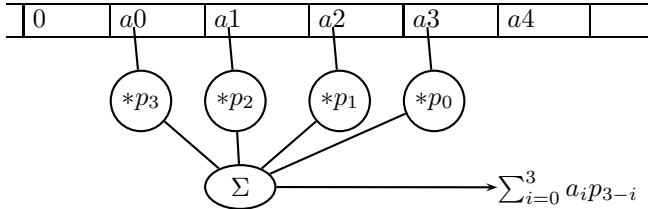
- Schreiben Sie eine Haskell-Funktion `differenzen`, die zu einer Liste von Zahlen `[a0, a1, a2, ...]` und einer Funktion `f` die Liste `[f a1 a0, f a2 a1, f a3 a2, ...]` berechnet.

- b) Eine unendliche Liste von Zahlen $[a_0, a_1, a_2, a_3, \dots]$ in Haskell soll die formale Potenzreihe $\sum_i a_i x^i$ repräsentieren. Implementieren Sie in Haskell die Funktion `cauchy`, die das Cauchy-Produkt

$$\left(\sum_i a_i x^i\right) \left(\sum_i b_i x^i\right) = \sum_n \sum_{i+j=n} a_i b_j x^n$$

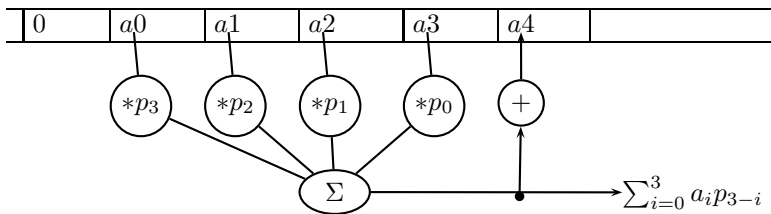
zweier Reihen berechnet.

- c) Eine Multiplikation mit einem Polynom (also einer Reihe, die fast nur Nullen enthält) kann einfach über ein Schieberegister implementiert werden: Z.B. für $p(x) = p_0 x^0 + p_1 x^1 + p_2 x^2 + p_3 x^3$ kann die Liste der Koeffizienten von $p(x) \sum_i a_i x^i$ mit folgendem Schieberegister berechnet werden:



Implementieren Sie eine Haskell-Funktion `falte`, welche die Multiplikation einer Reihe mit einem Polynom berechnet.

- d) Wird das Schieberegister zusätzlich rückgekoppelt, so berechnet es die Division durch $1 - x * p(x)$, wobei $p(x)$ das Rückkopplungspolynom ist. Die folgende Skizze zeigt das Schieberegister aus Teilaufgabe c) mit der beschriebenen Rückkopplung.



Implementieren Sie nun die Division als Haskell-Funktion `dividiere`.

Hinweise:

- Zur Lösung dieser Aufgabe können die folgenden Haskell-Funktionen nützlich sein:

```
take, drop      :: Int -> [a] -> [a]
splitAt        :: Int -> [a] -> ([a], [a])
repeat, replicate :: a -> [a]
zipWith        :: (a -> b -> c) -> [a] -> [b] -> [c]
sum, product   :: Num a => [a] -> a
reverse        :: [a] -> [a]
```

- Es ist nicht notwendig den Datentyp `Schieberegister` zu implementieren!

Aufgabe 5

2 T

Ein Inselparadies?

Die Insel Paradiso ist seit jeher mit glücklichen und zufriedenen Menschen bevölkert, die alle entweder blaue oder braune Augen besitzen. Leider existiert eine altes Ritual, das besagt, daß sich jeder, der eines Tages feststellt, daß er braune Augen hat, in der darauf folgenden Nacht umbringt. Da die Bewohner von Paradiso sich zwar diesem Ritual verpflichtet fühlen, aber gleichzeitig wissen, wie unsinnig es ist, sprechen sie nie über die Augenfarben ihrer Mitbewohner. Außerdem gibt es keine Spiegel oder andere Möglichkeiten, die eigene Augenfarbe festzustellen. Auf diese Weise konnte jahrhundertlang jeder Selbstmord verhindert werden.

Eines Tages strandet ein Seemann bei ihnen. Hilfreich und großzügig, wie es der Mentalität der Paradisianer entspricht, wird er wieder aufgepäppelt, und man baut ihm sogar ein neues Boot. Als er in See sticht, versammelt sich die gesamte Bevölkerung am Strand, um ihn zu verabschieden. Zu diesem Zeitpunkt gibt es exakt 50 Menschen mit braunen Augen und 50 mit blauen.

Vom Boot aus, ruft der Seemann der Versammlung zu: „Es gibt bei Euch Leute mit braunen Augen!“.

Wie groß ist die Bevölkerung von Paradiso in hundert Tagen? Gehen Sie davon aus, daß sich die Bevölkerungszahlen in diesem Zeitraum nicht auf natürliche Weise ändern. Begründen Sie Ihre Meinung.

Abgabe bis **Di. 17.05.2005** 12.00 Uhr in die Kästen im UG des Informatikneubaus