Universität Karlsruhe
Institut für Algorithmen und Kognitive Systeme
Prof. Dr. Jacques Calmet
Dipl.-Math. Ralf Eberhardt

Übungsblatt 3
Informatik II
Sommersemester 2005
1. Mai 2005

Aufgabe 1 **4+3=7 T**

Laufzeitanalyse

a) Betrachten Sie die folgenden Haskell-Funktionen:

```
bin :: Integer → Integer → Integer
bin k 0 = 1
bin 0 n = 0
bin n k = (bin (n−1) k) + (bin (n−1) (k−1))

bin2 :: Integer → Integer → Integer
bin2 n k = ((product [k+1..n]) ‘div‘ (product [1..n−k]))
```

Bestimmen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und jedes $k \in \{0, \ldots, n\}$ die Anzahl der Additionen und Multiplikationen die zur Berechnung von `bin` und `bin2` nötig sind.

b) Betrachten Sie die folgende Haskell-Funktion zur Berechnung des größten gemeinsamen Teilers:

```
ggT 0 0 = error "Division durch 0 in ggT"
ggT a 0 = a
ggT 0 b = b
ggT a b | a ≥ b     = ggT b (a ‘mod‘ b)
        | otherwise = ggT a (b ‘mod‘ a)
```

Wieviele Rekursionen benötigt der Algorithmus im schlimmsten Fall? Eine Angabe der Form $T(a, b) \in \Theta(f(a))$ für $a > b$ genügt. Wie müssen a und b im schlimmsten Fall aussehen?

Aufgabe 2 **4+2=6 T**

Relationen

a) Zeigen Sie: Auf der Menge der prädikatenlogischen Formeln definiert

$$F \equiv \text{ G gdw. } \mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G), \text{ wobei } \mathcal{A} \text{ eine für } F \text{ und } G \text{ passende Struktur ist,}$$

eine Kongruenzrelation.

b) Zeigen Sie: Auf der Menge der asymptotisch positiven Funktionen ist

$$f \sim_\Theta g \text{ gdw. } f \in \Theta(g)$$

eine Äquivalenzrelation.

Aufgabe 3 **2+2+2+2+4=12 T**

Eigenschaften der Fibonacci Zahlen

Ausgehend von der Definition der Fibonacci-Zahlen

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

sollen Sie einige Beziehungen beweisen.

a) Zeigen Sie, daß folgende Gleichung gültig ist.

$$F_{m+n} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n \quad m \in \mathbb{N}.$$

b) Beweisen Sie die Beziehung

$$F_{n+1} F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

c) Zeigen Sie ausgehend von Teilaufgabe b), daß zwei Fibonacci-Zahlen F_{n+1} und F_n zueinander relativ prim sind (d.h. der ggT ist Eins).

d) Beweisen Sie unter Verwendung der vorangehenden Teilaufgaben die folgende Behauptung
Für jede natürliche Zahl d gilt: d teilt F_m und F_n gdw. d teilt F_{m+n} und F_n.

e) Beweisen Sie, daß

$$\mathrm{ggT}(F_m, F_n) = F_{\mathrm{ggT}(m,n)}$$

ebenfalls gilt.

Aufgabe 4 **3+2+3=8 R**

Haskell, Sortieren

a) Implementieren Sie Merge-Sort in Haskell.

b) Implementieren Sie Insertion-Sort in Haskell.

c) Die folgende Definition in Haskell implemtiert den Datentyp $\mathbb{F}_2$

```
data F2 = O | I deriving (Read, Show, Eq, Ord)
```

Ergänzen Sie den Datentyp um eine Instanz der Klasse `Num`

```
instance Num F2 where
 (+)             -- Definition der Addition fehlt
 (-) = (+)
 (*)             -- Definition der Multiplikation fehlt
 negate = id
 signum _ = 0
 abs = id
 fromInteger i = -- Definition der Funktion fehlt
```

Aufgabe 5 **3+2=5 T**

Denksport

Gegeben sind 12 Billardkugeln, von denen maximal eine ein abweichendes Gewicht besitzt

a) Wie können Sie mit nur drei Wägungen einer Balkenwaage feststellen, ob eine Kugel ein abweichendes Gewicht besitzt; wenn ja welche und ob ihr Gewicht zu hoch oder zu niedrig ist?

b) Können Sie die Teilaufgabe a) auch für 13 Kugeln lösen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Abgabe bis **10.05.2005** 12.00 Uhr in die Kästen im UG des Informatikneubaus