Universität Karlsruhe
Institut für Algorithmen und Kognitive Systeme
Prof. Dr. Jacques Calmet
Dipl. Math. Ralf Eberhardt

Lösungen zu Übungsblatt Nr. 1

Informatik II
Sommersemester 2005

Lösung zu Aufgabe 1

a) $(Q(x,y) \vee P(x,y))$

b) $\exists x \forall y \neg Q(x,y)$

c) $\forall x(\exists y Q(y,x) \wedge \exists z Q(x,z))$

d) $\forall x \forall y P(x,y)$

e) $\forall x \forall y \exists z((Q(x,z) \wedge Q(z,y)) \vee (Q(y,z) \wedge Q(z,x)) \vee P(x,y))$

Lösung zu Aufgabe 2
Es ist

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\cdot n} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)\cdot k}.$$

Also muß der Induktionsanfang korrekterweise für $n = 2$ durchgeführt werden. Tatsächlich wurde aber für die linke Seite $n = 2$ und für die rechte Seite $n = 1$ verwendet (die linke Seite ist wegen einer Division durch Null für $n = 1$ nicht einmal definiert!).

Für $n = 2$ gilt aber: $\frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$ für die linke Seite und $\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$ für die rechte.

Lösung zu Aufgabe 3
Definiere $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit

$$\begin{array}{lcl}
V & = & \{<\text{Ziffer}>, <\text{Leitziffer}>, <\text{Index}>, <\text{Praedikatsymbol}>, <\text{Funktionssymbol}>, <\text{Term}>, <\text{Termrest}>, \\
 & & <\text{Praedikat}>, <\text{Praedikatrest}>, <\text{Formel}>\} \\
\Sigma & = & \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,P,f,x,(,),\neg,\wedge,\vee,,,\forall,\exists\} \\
S & = & <\text{Formel}> \\
P & = & P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5
\end{array}$$

Zunächst wird eine Zahl ohne führende Ziffer 0 definiert (Index) $P_1 = \{$

$$\begin{array}{lcl}
<\text{Ziffer}> & \rightarrow & 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9 \mid \\
 & & <\text{Ziffer}><\text{Ziffer}>, \\
<\text{LeitZiffer}> & \rightarrow & 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9 \mid \\
 & & <\text{Leitziffer}><\text{Ziffer}>, \\
<\text{Index}> & \rightarrow & <\text{Leitziffer}><\text{Ziffer}> \mid \\
 & & <\text{Leitziffer}> \\
\}.
\end{array}$$

Nun wird ein Prädikatensymbol, ein Funktionssymbol und eine Variable definiert $P_2 = \{$

$$\begin{array}{lcl}
<\text{Praedikatsymbol}> & \rightarrow & P<\text{Index}>, \\
<\text{Funktionssymbol}> & \rightarrow & f<\text{Index}>, \\
<\text{Variablensymbol}> & \rightarrow & x<\text{Index}>\}.
\end{array}$$

Nun die Terme $P_3 = \{$

$$\begin{array}{lcl}
<\text{Term}> & \rightarrow & <\text{Variablensymbol}> \mid \\
 & & <\text{Funktionssymbol}>(<\text{Term}><\text{Termrest}>, \\
<\text{Termrest}> & \rightarrow &) \mid \\
 & & ,<\text{Term}><\text{Termrest}>\}.
\end{array}$$

Weiter atomare Formeln $P_4 = \{$

$$\begin{array}{lcl}
<\text{Praedikat}> & \rightarrow & <\text{Praedikatsymbol}>(<\text{Term}><\text{Praedikatrest}> \\
<\text{Praedikatrest}> & \rightarrow &) \mid \\
 & & ,<\text{Term}><\text{Praedikatrest}>\}.
\end{array}$$

Nun die Formeln $P_5 = \{$

$$\begin{array}{lcl} \langle \text{Formel} \rangle & \to & \langle \text{Praedikat} \rangle \ | \\ & & \neg \langle \text{Formel} \rangle \ | \\ & & (\langle \text{Formel} \rangle \wedge \langle \text{Formel} \rangle) \ | \\ & & (\langle \text{Formel} \rangle \vee \langle \text{Formel} \rangle) \ | \\ & & \forall \langle \text{Variablensymbol} \rangle \langle \text{Formel} \rangle \ | \\ & & \exists \langle \text{Variablensymbol} \rangle \langle \text{Formel} \rangle \ \}. \end{array}$$

Lösung zu Aufgabe 4

a) Syntax: Bei der induktiven Definition von Formeln muß bei den atomaren Formeln noch

„Sind t_1, t_2 Terme, so ist auch $(t_1 = t_2)$ eine Formel.“

hinzugefügt werden.

Semantik (war nicht gefordert): Für die Bestimmung des Wahrheitswertes einer Formel, die die Gleichheit enthält, wird

$$\mathcal{A}(t_1 = t_2) = \begin{cases} W, & \text{falls } \mathcal{A}(t_1) = \mathcal{A}(t_2) \\ F, & \text{sonst} \end{cases}$$

hinzugefügt.

b)
- $$F = \exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n ((\bigwedge_{i=1}^{n} P(x_i)) \wedge (\bigwedge_{\substack{i,j \in \{1:n\} \\ i \neq j}} \neg(x_i = x_j)))$$

- $$G = \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_{n+1} ((\bigwedge_{i=1}^{n+1} P(x_i)) \to (\bigvee_{\substack{i,j \in \{1:n+1\} \\ i \neq j}} (x_i = x_j)))$$

- $H = (F \wedge G)$

c) Im Körper $\mathbb{F}_2$ existiert für die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ genau eine Lösung. Wähle also $U = \mathbb{F}_2$.