**Aufgabe 1** $3T$

Zyklen in ungerichteten Graphen

Ein ungerichteter Graph $G$ bestehe aus einer endlichen Menge $V$ von Knoten und einer Menge $E$ von zweielementigen **Teilmengen** von V (Kanten), geschrieben $G = (V, E)$.

Zeigen Sie, daß es zu jedem $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ einen ungerichteten Graphen mit $|V| = 2m$ und $|E| = m^2$ gibt, der keine Zyklen der Länge 3 enthält.

**Lösung zu Aufgabe 1**
Man konstruiere einen bipartiten Graphen $G'$, d.h. man teile $V$ in zwei Gruppen zu je $m$ Knoten auf. Es wird jeder Knoten der einen Gruppe mit jedem Knoten der anderen Gruppe verbunden. Dies ergibt genau $m^2$ Kanten. Jede dieser Kanten führt von einer Seite des bipartiten Graphen auf die andere. Da jeder Zyklus in $G'$ auf derselben Seite beginnen und enden muß, kann er nur aus einer geraden Anzahl von Kanten bestehen, 3 ist aber ungerade.

*Hinweis:* Aufgrund der Defintion des Graphen $G$ gibt es keine reflexiven Kanten! Lösungen, die solche enthalten, sind also als falsch zu bewerten.

**Aufgabe 2** $3T$

Dynamisches Programmieren

Gegeben sei die Adjazenzmatrix $W$ des Graphen $G = (V, E)$. Die Kosten einer Kante $(v_i, v_j)$ seien bezeichnet mit $\omega_{ij}$. Beschreiben Sie ein Verfahren, das mittels dynamischem Programmieren für alle Paare $(i, j)$ die geringsten Kosten eines Weges von $v_i$ nach $v_j$. Welche Nebenbedingungen müssen dabei für die Kosten gelten?

**Lösung zu Aufgabe 2**
Bestimmung der kleinsten Kosten zwischen jeweils zwei Knoten $v_i$ und $v_j$:

$$\forall i \forall j : \omega_{\min_{ij}} = kk_{ij}$$

$$kk_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{falls } i = j \\ \min(\{kk_{ik} + kk_{kj} \mid i \leq k < j\} \cup \{\omega_{ij}\}), & \text{sonst} \end{cases}$$

Der Algorithmus findet $kk_{ij} \leq \omega_{ij}$. $kk_{ij}$ ist echt kleiner $\omega_{ij}$, falls es einen Weg von $v_i$ über $e_k$ nach $v_j$ mit geringeren Kosten als $\omega_{ij}$ gibt.

Die mehrfache Berechnung von $kk_{ij}$ spart man sich, indem man sich die Ergebnisse früherer Berechnungen mit den selben Parametern merkt.

Nebenbedingungen: Die Kosten $\omega_{ij}$ sollten $\geq 0$ sein. Falls dennoch Knoten betrachtet werden sollen, so darf es zumindest keinen Zyklus mit negativen Kosten geben.

**Aufgabe 3** $2 + 3 = 5T$

Textsuche

a) Sie wollen in einem Text das Muster „ababbaba“ finden. Geben Sie die Belegung der Reihung $f$ an, wie sie beim Knuth-Morris-Pratt-Algorithmus verwendet wird.

b) Zeigen Sie, wie man mit dem KMP-Algorithmus das Muster in dem Text „abbababababbaababbababbaa“ findet. Geben Sie dabei an, wie das Suchmuster jeweils verschoben wird.

**Lösung zu Aufgabe 3**

a)

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -1 | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 3 |

b)

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | b | a | b | b | a | b | a | | | | | | | | | |
| | a | b | a | b | b | a | b | a | | | | | | | | |
| | | | a | b | a | b | b | a | b | a | | | | | | |
| | | | | | | | | a | b | a | b | b | a | b | a | |
| | | | | | | | | | a | b | a | b | b | a | b | a |

**Aufgabe 4** *4T*

Wiederholung

Zeigen Sie, daß die folgenden PL-Formeln erfüllbarkeitsäquivalent sind:

$$F_1 = \forall x \forall y \forall z P(x, y, z)$$

$$F_2 = \forall x \forall y \forall z (Q(x, y) \wedge R(z))$$

**Lösung zu Aufgabe 4**

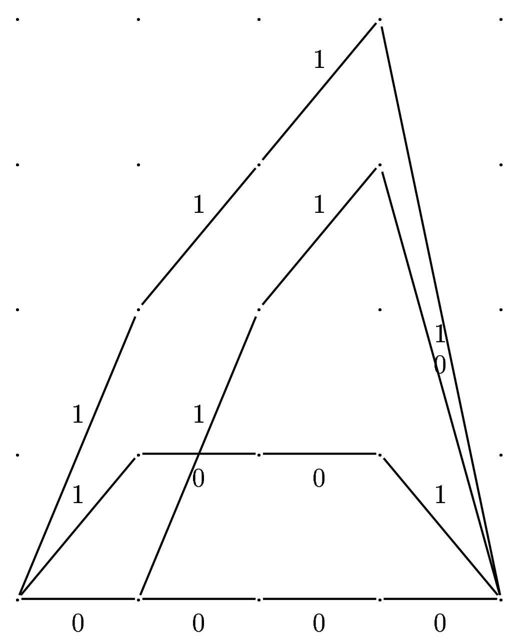
„⇒:“ Gegeben sei eine Stuktur $\mathcal{A} = (U_\mathcal{A}, I_\mathcal{A})$ für $F_1$. Das heißt, $I_\mathcal{A}$ ordnet dem Prädikatsymbol $P$ ein dreistelliges Prädikat über dem Universum $U_\mathcal{A}$ zu. Es sei nun $\mathcal{A}$ ein Modell für $F_1$.
Definiere $\mathcal{A}' = (U_\mathcal{A}, I_{\mathcal{A}'})$ derart, daß $Q(x, y) = 1 \leftrightarrow P(x, y, f(x, y)) = 1$ für geeignet gewähltes $f$ und $R(z) = 1 \leftrightarrow P(g(z), h(z), z) = 1$ für geeignet gewählte $g(z)$ und $h(z)$. Dann ist $\mathcal{A}'$ ein Modell für $F_2$.

„⇐:“ Sei $\mathcal{A} = (U_\mathcal{A}, I_\mathcal{A})$ ein Modell für $F_2$. Definiere $\mathcal{A}' = (U_\mathcal{A}, I_{\mathcal{A}'})$ derart, daß gilt $P(x, y, z) = 1 \leftrightarrow Q(x, y) = 1 \wedge R(z) = 1$. Dann ist $\mathcal{A}'$ ein Modell für $F_1$.

**Aufgabe 5** $3 + 3 = 6T$

Dynamische Programmierung, Trellis

a) Überführen Sie Sie das folgende Trellis in minimale Form.




b) Das folgende fehlerhafte Codewort wurde empfangen

$$c = (c_0, c_1, c_2, c_3) = (0, 1, 0, 1)$$

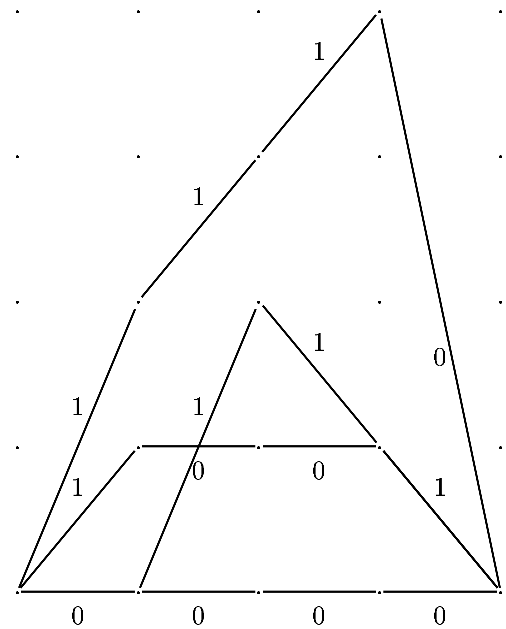
dabei wurden für die einzelnen Bits die folgenden Wahrscheinlichkeiten berechnet:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $P(c_i = 1)$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{10}{16}$ | $\frac{4}{16}$ | $\frac{14}{16}$ |

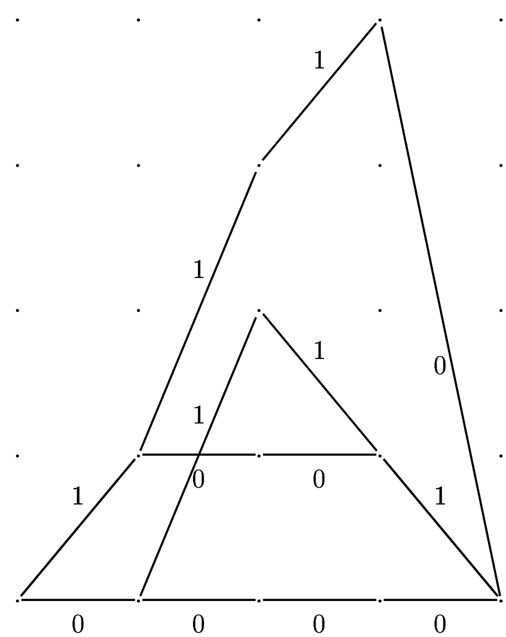
Berechnen Sie dasjenige Codewort welches am wahrscheinlichsten gesendet wurde. Benutzen Sie dazu Ihr Trellis und geben Sie in einer Tabelle die Bewertungen der einzelnen Knoten an.

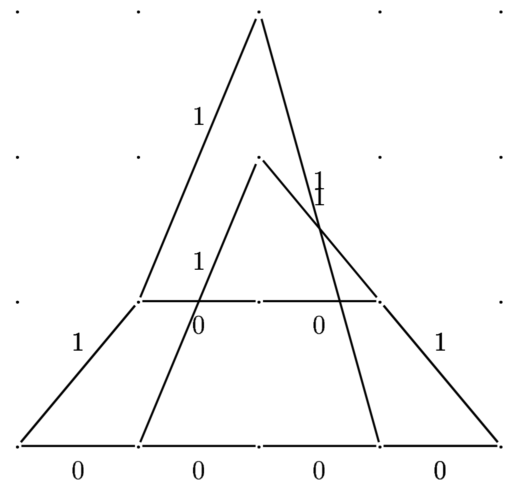
**Lösung zu Aufgabe 5**

a) Ich fasse zunächst die beiden Pfade mit Einsen am Ende zusammen:




Und dann die beiden Einsen am Anfang:






Fertig!

b) Ich nehme natürlich das minimale Trellis, aber das von Teilaufgabe a) geht natürlich auch (allerdings mit fünf Knoten pro Ebene.

| Ebene | Schritt 1 | Schritt 2 | Schritt 3 | Schritt 4 | Schritt 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Knoten 0 | 0 | $\frac{15}{16}$ | $\frac{15\cdot 6}{16^2}$ | Max $\left\{\frac{15\cdot 6\cdot 12}{16^3}, \frac{1\cdot 10\cdot 4}{16^3}\right\}$ | Max $\left\{\frac{15\cdot 6\cdot 12\cdot 2}{16^4}, \frac{15\cdot 10\cdot 4\cdot 14}{16^4}\right\}$ |
| Knoten 1 | 0 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1\cdot 6}{16^2}$ | Max $\left\{\frac{1\cdot 6\cdot 12}{16^3}, \frac{15\cdot 10\cdot 4}{16^3}\right\}$ | 0 |
| Knoten 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Knoten 3 | 0 | 0 | $\frac{1\cdot 10}{\frac{1}{6}^2}$ | 0 | 0 |

Das Codewort $(0, 1, 1, 1)$ ist mit größter Wahrscheinlichkeit gesendet worden.