Universität Karlsruhe
Institut für Algorithmen und Kognitive Systeme
Prof. Dr. Jacques Calmet
Dipl. Math. Ralf Eberhardt

Übungsblatt 1

Informatik II
Sommersemester 2005
15. April 2005

Aufgabe 1 **1+1+1+1+1=5 T**

Formalisieren von Aussagen

Gegeben sei die Struktur $\mathcal{A} = (U_\mathcal{A}, I_\mathcal{A})$ mit $U_\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}, I_\mathcal{A}(P) = \{(m,n) \mid m,n \in U_\mathcal{A}, m = n\}$ für ein zweistelliges Prädikat P und $I_\mathcal{A}(Q) = \{(m,n) \mid m,n \in U_\mathcal{A}, m < n\}$ für ein zweistelliges Prädikat Q. Verwenden Sie die Prädikate P und Q, um prädikatenlogische Formeln anzugeben, die in der Struktur $\mathcal{A}$ den folgenden umgangssprachlichen Sätzen entsprechen:

a) „x ist kleiner oder gleich y“

b) „es gibt ein größtes Element“

c) „es gibt kein kleinstes und kein größtes Element“

d) „U enthält genau ein Element“

e) „zwischen je zwei verschiedenen Elementen liegt ein drittes“

Aufgabe 2 **2 T**

Induktion

Der folgende Induktionsbeweis scheint korrekt zu sein, aber aus irgendwelchen Gründen ergibt sich für $n = 6$ die linke Seite zu $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} = \frac{5}{6}$, während für die rechte Seite $\frac{3}{2} - \frac{1}{6} = \frac{4}{3}$ gilt. Finden Sie den Fehler im Induktionsbeweis:

Satz: $\forall n \in \mathbb{N}:$

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\cdot n} = \frac{3}{2} - \frac{1}{n}$$

Beweis: Vollständige Induktion über n.

I.A.: $n = 1$
Es gilt $\frac{3}{2} - \frac{1}{n} = \frac{1}{1\cdot 2}$.

I.H.: Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, so daß die Behauptung stimmt.

I.S.: $n \to n+1$

$$\begin{aligned}\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\cdot n} + \frac{1}{n\cdot(n+1)} &\overset{\text{I.H.}}{=} \frac{3}{2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n\cdot(n+1)} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

Aufgabe 3 **7 T**

Prädikatenlogik als formale Sprache

Definition (Syntax der Prädikatenlogik)
Eine *Variable* hat die Form x_i mit $i \in \mathbb{N}$. Ein *Prädikatsymbol* hat die Form P_i mit $i \in \mathbb{N}$, und ein *Funktionssymbol* hat die Form f_i mit $i \in \mathbb{N}$. Hierbei heißt i jeweils der *Unterscheidungsindex*. Wir definieren nun *Terme* durch einen induktiven Prozeß:

- Jede Variable ist ein Term.
- Falls f ein Funktionssymbol mit Stelligkeit k ist, und falls $t_1, \ldots, t_k$ Terme sind, so ist auch $f(t_1, \ldots, t_k)$ ein Term.

Nun können wir wiederum induktiv *Formeln* definieren:

- Falls P ein Prädikatsymbol der Stelligkeit k ist, und falls $t_1, \ldots, t_k$ Terme sind, dann ist $P(t_1, \ldots, t_k)$ eine Formel.
- Für jede Formel F ist auch $\neg F$ eine Formel.
- Für alle Formeln F und G sind auch $(F \wedge G)$ und $(F \vee G)$ Formeln.
- Falls x eine Variable ist und F eine Formel, so sind auch $\exists x F$ und $\forall x F$ Formeln.

Benutzen Sie diese Definition um aus der Syntax der Prädikatenlogik eine kontextfreie Grammatik für die Erzeugung von Termen und prädikatenlogischen Formeln anzugeben.

Aufgabe 4 **2+3+1=6 T**

Prädikatenlogik mit Gleichheit

a) In der Prädikatenlogik mit Gleichheit ist auch das Symbol „=“ für den Vergleich von Termen zugelassen. Wie muß die Syntax der PL aus Aufgabe 3 erweitert werden, um die PL mit Gleichheit zu erhalten?

b) Sei P ein einstelliges Prädikatsymbol. Geben Sie jeweils eine Formel an, die besagt, daß P auf

- mindestens n verschiedene Objekte ($n \in \mathbb{N}$)
- höchstens n verschiedene Objekte ($n \in \mathbb{N}$)
- genau n verschiedene Objekte ($n \in \mathbb{N}$)

zutrifft.

c) Sei nun $n = 1$ und das Prädikat P werde in einer Struktur $\mathcal{A} = (U_\mathcal{A}, I_\mathcal{A})$ als $I_\mathcal{A}(P) = \{x \mid x \in U_\mathcal{A}, x^2 + 1 = 0\}$ interpretiert. Geben Sie ein Universum $U_\mathcal{A}$ an, indem die Aussage, daß P auf genau ein Objekt des Universums zutrifft, wahr wird.

Abgabe bis **25.04.2005** 12.00 Uhr in die **neuen** Kästen im UG des Informatikneubaus