

# Prädikatenlogik: Normalformen

- Ausgangspunkt: Äquivalenz von Formeln
- Äquivalenz in der Prädikatenlogik
  - Übertragung aussagenlogischer Äquivalenzen
  - Formeln mit Quantoren: Äquivalenzen in der Prädikatenlogik
- Umbenennung von Variablen: Substitution
- Normalformen in der Prädikatenlogik
  - Pränexform
  - Skolemisierung
  - Äquivalenz vs. Erfüllbarkeitsäquivalenz

Habel / Freksa / Eschenbach

Logik-10 [1]

## Aussagenlogische Äquivalenz $\rightarrow$ prädikatenlogische Äquivalenz

### Satz

Gegeben seien zwei äquivalente aussagenlogische Formeln  $F$  und  $G$ . Wenn jedes Vorkommen einer Teilformel  $A_i$  in  $F$  und in  $G$  durch die gleiche prädikatenlogische Formel  $H_i$  substituiert wird, ergibt dies äquivalente Formeln der Prädikatenlogik.

### Beispiel

- $F = \neg(A \wedge B)$        $G = (\neg A \vee \neg B)$   
sub (A) =  $P(x)$       sub (B) =  $Q(y)$   
 $\neg(P(x) \wedge Q(y)) \equiv (\neg P(x) \vee \neg Q(y))$   
sub (A) =  $\exists x P(x)$       sub (B) =  $\forall y Q(y)$   
 $\neg(\exists x P(x) \wedge \forall y Q(y)) \equiv (\neg \exists x P(x) \vee \neg \forall y Q(y))$

➡ Die Äquivalenzen der Aussagenlogik gelten auch in der Prädikatenlogik.

➡ Zusätzliche prädikatenlogische Äquivalenzen betreffen die semantischen Beziehungen zwischen Formeln mit Quantifikation.

Habel / Freksa / Eschenbach

Logik-10 [3]

# Äquivalenz

### Definition

- Zwei Formeln  $F$  und  $G$  heißen *äquivalent*, falls  $F \models G$  und  $G \models F$ .
- Dies wird als  $F \equiv G$  geschrieben.

### Satz

$F \equiv G$  GDW.

Für alle zu  $F$  und  $G$  passenden Strukturen  $\mathcal{A}$  gilt:  $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G)$

Habel / Freksa / Eschenbach

Logik-10 [2]

## Wichtige Äquivalenzen der Prädikatenlogik

Seien  $F$  und  $G$  beliebige Formeln

1.  $\neg \forall x F \equiv \exists x \neg F$   
 $\neg \exists x F \equiv \forall x \neg F$

**Dualität von  $\forall$  und  $\exists$**

2. Falls  $x$  in  $G$  nicht frei vorkommt  
 $(\forall x F \wedge G) \equiv \forall x (F \wedge G)$   
 $(\forall x F \vee G) \equiv \forall x (F \vee G)$   
 $(\exists x F \wedge G) \equiv \exists x (F \wedge G)$   
 $(\exists x F \vee G) \equiv \exists x (F \vee G)$

**Absorption**

von Formeln ohne freie Variablen in den Bereich eines Quantors:  
**Skopuserweiterung**

3.  $(\forall x F \wedge \forall x G) \equiv \forall x (F \wedge G)$   
 $(\exists x F \vee \exists x G) \equiv \exists x (F \vee G)$

**Distributivität** von

All-quant. bzgl. Konjunktion  
Exist-quant. bzgl. Disjunktion

4.  $\forall x \forall y F \equiv \forall y \forall x F$   
 $\exists x \exists y F \equiv \exists y \exists x F$

**Vertauschung der Quantorenreihenfolge**

Habel / Freksa / Eschenbach

Logik-10 [4]

## Beweis einer Absorptionsäquivalenz

**Satz:**  $(\forall x F \wedge G) \equiv \forall x (F \wedge G)$ , falls  $x$  nicht frei in  $G$  vorkommt.

**Bew.:**

Sei  $\mathcal{A} = (U, I)$  eine Struktur, passend sowohl zu  $(\forall x F \wedge G)$  als auch zu  $\forall x (F \wedge G)$ .

$$\mathcal{A}(\forall x F \wedge G) = 1$$

$$\text{GDW. } \mathcal{A}(\forall x F) = 1 \text{ und } \mathcal{A}(G) = 1$$

$$\text{GDW. für alle } d \in U \text{ gilt: } \mathcal{A}_{[x/d]}(F) = 1 \text{ und } \mathcal{A}(G) = 1$$

$$\text{GDW. für alle } d \in U \text{ gilt: } \mathcal{A}_{[x/d]}(F) = 1 \text{ und } \mathcal{A}_{[x/d]}(G) = 1 \quad [\text{da } x \text{ nicht frei in } G]$$

$$\text{GDW. für alle } d \in U \text{ gilt: } \mathcal{A}_{[x/d]}(F \wedge G) = 1$$

$$\text{GDW. } \mathcal{A}(\forall x (F \wedge G)) = 1$$

## Ersetzbarkeitstheorem (Prädikatenlogik)

**Satz**

Seien  $F$  und  $G$  äquivalente Formeln und sei  $H$  eine Formel mit Teilformel  $F$ .

Sei  $H'$  eine Formel, die aus  $H$  durch Ersetzung von  $F$  durch  $G$  hervorgeht.

Dann gilt:  $H' \equiv H$ .

**Bew.** (folgt dem Prinzip der strukturellen Induktion):

- Beim Induktionsschritt sind zusätzlich zu den Fällen, die beim Beweis des Ersetzbarkeitstheorem für die Aussagenlogik berücksichtigt wurden, auch folgende Fälle zu beweisen:
  - $H$  hat die Form:  $H = \exists x H_1$
  - $H$  hat die Form:  $H = \forall x H_1$

**Anmerkung:** Induktionsbeweise über den Aufbau prädikatenlogischer Formeln

- zusätzlich bei Beweisen zu Eigenschaften von Formeln
  - Formeln mit Quantifikation
- zusätzlich gegebenfalls induktive Beweise über die Eigenschaften von Termen

## Einige Nicht-Äquivalenzen

**Satz:**

$$\text{a) } (\forall x F \vee \forall x G) \not\equiv \forall x (F \vee G)$$

$$(\exists x F \wedge \exists x G) \not\equiv \exists x (F \wedge G)$$

$$\text{b) } \forall x \exists y F \not\equiv \exists y \forall x F$$

**Beweis:**

- Gegenbeispiele:
  - zu a)  $F \approx$  ist ungerade Zahl,  $G \approx$  ist gerade Zahl
  - zu b)  $F \approx$  ist direkter Nachfolger von

## Äquivalenz-Umformungen

$$(\neg(\exists x P(x, y) \vee \forall z Q(z)) \wedge \exists w P(f(a, w)))$$

$$\equiv ((\neg\exists x P(x, y) \wedge \neg\forall z Q(z)) \wedge \exists w P(f(a, w))) \quad \text{de Morgan}$$

$$\equiv ((\forall x \neg P(x, y) \wedge \exists z \neg Q(z)) \wedge \exists w P(f(a, w))) \quad [1] \text{ Dualität}$$

$$\equiv (\exists w P(f(a, w)) \wedge (\forall x \neg P(x, y) \wedge \exists z \neg Q(z))) \quad \text{Komm. } \wedge$$

$$\equiv \exists w (P(f(a, w)) \wedge (\forall x \neg P(x, y) \wedge \exists z \neg Q(z))) \quad [2] \text{ Skopus von } \exists w$$

$$\equiv \exists w (P(f(a, w)) \wedge \forall x (\neg P(x, y) \wedge \exists z \neg Q(z))) \quad [2] \text{ Skopus von } \forall x$$

$$\equiv \exists w (\forall x (\neg P(x, y) \wedge \exists z \neg Q(z)) \wedge P(f(a, w))) \quad \text{Komm. } \wedge$$

$$\equiv \exists w (\forall x (\exists z \neg Q(z) \wedge \neg P(x, y)) \wedge P(f(a, w))) \quad \text{Komm. } \wedge$$

$$\equiv \exists w (\forall x \exists z (\neg Q(z) \wedge \neg P(x, y)) \wedge P(f(a, w))) \quad [2] \text{ Skopus von } \exists z$$

$$\equiv \exists w \forall x \exists z (\neg Q(z) \wedge \neg P(x, y) \wedge P(f(a, w))) \quad [2] \text{ Skopus von } \forall x$$

– Quantorenreihenfolge nach der Umformung hängt von der Reihenfolge der Umformungen ab

– Skopusweiterung nach [2] ist nur möglich, wenn in der absorbierten Formel nicht die Variable auftritt, die durch den betroffenen Quantor gebunden ist.

---

## Substitution (1)

---

### Definition (Substitution)

Seien  $F$  eine Formel,  $x$  eine Variable und  $t$  ein Term.  $F_{[x/t]}$  ist die Formel, die sich aus  $F$  ergibt, wenn jedes freie Vorkommen der Variablen  $x$  in  $F$  durch den Term  $t$  ersetzt wird.  $[x/t]$  wird als **Substitution** bezeichnet.

- Substitutionen können als Abbildungen  $\sigma: V \rightarrow T$  von der Menge der Variablen in die Menge der Terme aufgefasst werden. Statt  $\sigma(y)$  wird auch  $y\sigma$  geschrieben.  
→ Substitutionen können mehr als eine Variable ersetzen.
- $[x/t]$  ist dann die Abbildung  $\sigma$ , für die gilt:  $\sigma(z) = \begin{cases} t, & \text{falls } z = x \\ z, & \text{sonst} \end{cases}$ ,  
d.h. die Abbildung, die die Variable  $x$  auf  $t$  abbildet und alle anderen Variablen auf sich selbst abbildet.
- Sei  $\sigma: V \rightarrow T$  eine Substitution. Fortsetzung von  $\sigma$  zu einer Abbildung  $T \rightarrow T$ :
  - $\sigma(c) = c\sigma = c$  für alle Konstantensymbole (null-stelligen Funktionssymbole)
  - $\sigma(f(t_1, \dots, t_k)) = f(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_k)) = f(t_1\sigma, \dots, t_k\sigma)$
- Sei  $\sigma: V \rightarrow T$  eine Substitution. Entsprechend zum Fall der Terme erfolgt auch die Fortsetzung von  $\sigma$  zu einer Abbildung  $F \rightarrow F$  von Formeln auf Formeln.

---

## Überführungslemma

---

### Überführungslemma:

Sei  $F$  eine Formel,  $x$  eine Variable und  $t$  ein Term, der keine in  $F$  gebundene Variable enthält. Dann gilt:

$$\mathcal{A}(F_{[x/t]}) = \mathcal{A}_{[x/\mathcal{A}(t)]}(F)$$

- Beweis: siehe Schöning: Übung 58.
- Das Überführungslemma stellt den Zusammenhang zwischen Substitutionen und Modellen (bzw. Auswertungen) her:
  - $\mathcal{A}(F_{[x/t]})$  Auswertung einer Formel, die aus  $F$  durch Substitution von  $x$  durch  $t$  hervorgeht
  - $\mathcal{A}_{[x/\mathcal{A}(t)]}(F)$  Auswertung von  $F$  bezüglich der  $x$ -Variante, in der  $x$  zu  $\mathcal{A}(t)$  ausgewertet wird.

$$\begin{array}{ccc} T & F & [x/t] \rightarrow F_{[x/t]} \\ \downarrow \mathcal{A} & \downarrow & \downarrow \\ \mathcal{A}(t) & \downarrow \mathcal{A}_{[x/\mathcal{A}(t)]} & \downarrow \mathcal{A} \\ & \mathcal{A}_{[x/\mathcal{A}(t)]}(F) & = \mathcal{A}(F_{[x/t]}) \end{array}$$

---

## Substitution (2)

---

### Komposition von Substitutionen:

- $[x/t_1][y/t_2]$  bezeichnet die Substitution, die zuerst jedes freie Vorkommen von  $x$  durch  $t_1$  ersetzt und anschliessend jedes freie Vorkommen von  $y$  durch  $t_2$  ersetzt.

$$\begin{array}{ccc|ccc} P(x) \wedge Q(f(y)) & & P(x) \wedge Q(f(y)) & & P(x) \wedge Q(f(y)) \\ [x/a_1] P(a_1) \wedge Q(f(y)) & [x/y] & P(y) \wedge Q(f(y)) & [x/g(y)] & P(g(y)) \wedge Q(f(y)) \\ [y/a_2] P(a_1) \wedge Q(f(a_2)) & [y/a] & P(a) \wedge Q(f(a)) & [y/a] & P(g(a)) \wedge Q(f(a)) \end{array}$$

- Seien  $\sigma$  und  $\tau$  Substitutionen. Die *Komposition* von  $\sigma$  und  $\tau$  ist die Substitution  $\sigma\tau$ , für die gilt:  $x(\sigma\tau) = (x\sigma)\tau$ , d.h.:  $\sigma\tau(x) = \tau(\sigma(x))$ , für alle Variablen  $x \in V$ .

---

## Umbenennung

---

### Lemma (gebundene Umbenennung)

Sei  $F = QxG$  eine Formel mit dem Quantor  $Q \in \{\exists, \forall\}$ .  
 $y$  sei eine Variable, die in  $G$  nicht vorkommt.

Dann gilt:  $F \equiv QyG_{[x/y]}$ .

**Beweis:** siehe Übungsaufgabe.



Zu jeder Formel  $F$  gibt es eine äquivalente Formel  $G$  in *bereinigter Form*.  
Eine Formel  $G$  heisst **bereinigt**, falls es keine Variable in  $G$  gibt, die in der Formel sowohl gebunden als auch frei vorkommt und falls alle Quantoren in  $G$  unterschiedliche Variablen binden.

## Pränexform (1)

### Definition (Pränexform)

Eine Formel heisst pränex, falls sie die folgende Form aufweist:  $Q_1 y_1 Q_2 y_2 \dots Q_n y_n F$ , wobei  $Q_i \in \{\exists, \forall\}$ ,  $n \geq 0$ , die  $y_i$  Variablen sind und in  $F$  keine Quantoren vorkommen.

$Q_1 y_1 Q_2 y_2 \dots Q_n y_n$  heisst **Präfix**,  $F$  ist die **Matrix**.

### Satz (Existenz einer äquivalenten Formel in Pränexform)

Für jede Formel  $F$  gibt es eine äquivalente und bereinigte Formel  $G$  in Pränexform. (BPF  $\approx$  bereinigt in Pränexform)

**Beweis:** (Durch Induktion über die syntaktische Struktur der Formel)

- Induktionsanfang:  $F$  ist eine atomare Formel. Dann hat  $F$  Pränexform.
- Induktionsschritt, mit den drei Fällen.
  - $F$  hat die Form  $\neg F_1$
  - $F$  hat die Form  $F_1 \odot F_2$ , mit  $\odot \in \{\wedge, \vee\}$ , d.h.:  $F = F_1 \wedge F_2$  oder  $F = F_1 \vee F_2$ .
  - $F$  hat die Form  $Q_x F_1$ , mit  $Q \in \{\exists, \forall\}$ .

## Skolemisierung (1)

### Definition (Skolemisierung, Skolemfunktion, Skolemkonstante)

Sei  $F$  in bereinigter Pränexform  $Q_1 y_1 Q_2 y_2 \dots Q_n y_n G$ .

- $Q_{k+1}$  sei der am weitesten links stehende Existenzquantor, d.h.  $F$  hat die Form  $\forall y_1 \forall y_2 \dots \forall y_k \exists z G'$ , mit  $G' = Q_{k+2} y_{k+2} \dots Q_n y_n G$ ,  $k \geq 0$ .
  - Wir führen ein neues  $k$ -stelliges Funktionssymbol  $f$  ein und bilden die Formel:  $F' = \forall y_1 \forall y_2 \dots \forall y_k G' [z/f(y_1, \dots, y_k)]$ 
    - Der Präfix von  $F'$  ist:  $\forall y_1 \forall y_2 \dots \forall y_k Q_{k+2} y_{k+2} \dots Q_n y_n$ .  $F'$  enthält einen Existenzquantor weniger als  $F$ . Die durch diesen Existenzquantor gebundene Variable tritt nicht mehr in  $F'$  auf. Sie wurde durch  $f(y_1, \dots, y_k)$  substituiert.
    - $f$  heisst **Skolemfunktion**, bzw. – im Fall  $k = 0$  – **Skolemkonstante**. [Toralf Skolem]
  - Symbole für Skolemfunktionen und Skolemkonstanten sind von allen bisher verwendeten Funktionssymbolen verschieden.
- ➔ Dieser Vorgang der Einführung neuer Funktionssymbole – *Skolemisierung* genannt – stellt eine Erweiterung des Alphabets – und somit der Sprache – dar.

## Pränexform (2): Beweisfortsetzung

- $F$  hat die Form  $\neg F_1$  und  $G_1 = Q_1 y_1 Q_2 y_2 \dots Q_n y_n G'$  (mit der Matrix  $G'$ ) sei eine zu  $F_1$  äquivalente Formel in Pränexform.

$$\text{Sei } \bar{Q} = \begin{cases} \exists, & \text{falls } Q = \forall \\ \forall, & \text{falls } Q = \exists \end{cases}.$$

Dann gilt:  $F \equiv \bar{Q}_1 y_1 \bar{Q}_2 y_2 \dots \bar{Q}_n y_n \neg G'$ .

- $F$  hat die Form  $F_1 \odot F_2$ .  $G_1$  und  $G_2$  seien zu  $F_1$  bzw.  $F_2$  äquivalente Formeln in bereinigter Pränexform, die unterschiedliche gebundene Variablen enthalten. [gemeinsame Bereinigung !]
  - Dann haben  $G_1$  und  $G_2$  folgende Form:  $G_1 = Q_1 y_1 Q_2 y_2 \dots Q_n y_n G_1'$  und  $G_2 = Q_1' z_1 Q_2' z_2 \dots Q_k' z_k G_2'$ , wobei  $G_1'$  und  $G_2'$  Matrixform haben.
  - Dann gilt:  $F \equiv Q_1 y_1 Q_2 y_2 \dots Q_n y_n Q_1' z_1 Q_2' z_2 \dots Q_k' z_k (G_1' \odot G_2')$
- $F$  hat die Form  $Q_x F_1$ , mit  $Q \in \{\exists, \forall\}$  und  $F_1$  sei äquivalent zur bereinigten Pränexformel  $Q_1 y_1 Q_2 y_2 \dots Q_n y_n F_1'$ , mit  $x$  verschieden zu allen  $y_i$ . Dann gilt:  $F \equiv Q_x Q_1 y_1 Q_2 y_2 \dots Q_n y_n F_1'$ .

## Skolemisierung (2)

### Beispiele

k=0	$\exists x \forall y (\text{vorf}(x,y) \wedge \text{weibl}(x))$	Skolemkonstante $e$
	$\forall y (\text{vorf}(e,y) \wedge \text{weibl}(e))$	
k=1	$\forall y \exists x (\text{elt}(x,y) \wedge \text{weibl}(x))$	Skolemfunktion $m(y)$
	$\forall y (\text{elt}(m(y), y) \wedge \text{weibl}(m(y)))$	
	$\forall y \exists x (\text{vorf}(x,y) \wedge \text{weibl}(x))$	Skolemfunktion $f(y)$
	$\forall y (\text{vorf}(f(y), y) \wedge \text{weibl}(f(y)))$	
k=2	$\forall x \forall y \exists z (\text{gr\_elt}(x,y) \rightarrow (\text{elt}(x,z) \wedge \text{elt}(z,y)))$	
	$\forall x \forall y \exists z (\neg \text{gr\_elt}(x,y) \vee (\text{elt}(x,z) \wedge \text{elt}(z,y)))$	
	$\forall x \forall y (\neg \text{gr\_elt}(x,y) \vee (\text{elt}(x, g(x,y)) \wedge \text{elt}(g(x,y), y)))$	Skolemfunktion $g(x,y)$

- ➔ Vorsicht: Die Einführung der Skolemfunktion besagt noch nichts über die Interpretation der Formeln, die Skolemfunktionen enthalten.

**Definition (Erfüllbarkeitsäquivalenz)**

Zwei Formeln  $F$  und  $G$  sind **erfüllbarkeitsäquivalent**, wenn gilt:  
 $F$  ist erfüllbar Gdw.  $G$  erfüllbar ist.

- $F$  und  $G$  sind erfüllbarkeitsäquivalent: Es gibt eine erfüllende Struktur  $\mathcal{A}$  zu  $F$  Gdw. es eine erfüllende Struktur  $\mathcal{A}'$  zu  $G$  gibt.
- $F$  und  $G$  sind erfüllbarkeitsäquivalent:  $F$  ist unerfüllbar Gdw.  $G$  unerfüllbar ist.
- Äquivalenz betrifft gleiche Bewertung durch alle passenden Strukturen. Erfüllbarkeitsäquivalenz betrifft die Existenz von erfüllenden Strukturen. (Diese können verschieden sein.)
- Erfüllbarkeitsäquivalenz ist schwächer als Äquivalenz, d.h. Äquivalenz schliesst Erfüllbarkeitsäquivalenz ein.

**Satz**

Sei  $F$  eine Formel und seien  $x_1, \dots, x_n$  die in  $F$  frei vorkommenden Variablen.  
 $F$  ist genau dann erfüllbar, wenn  $\exists x_1 \dots \exists x_n F$  erfüllbar ist.

→  $F$  (mit den freien Variablen  $x_1, \dots, x_n$ ) und  $\exists x_1 \dots \exists x_n F$  sind erfüllbarkeitsäquivalent.

---

**Erfüllbarkeitslemma für Skolemisierungen**

---

**Beweisidee:**

- $k = 0$   
$$F = \exists x \forall y (P_1(x, y) \wedge P_2(x))$$
$$F' = \forall y (P_1(f, y) \wedge P_2(f))$$
- Wenn  $F'$  erfüllbar, gibt es  $\mathcal{A}$  mit  $\mathcal{A}(F') = 1$ .  
Dieses Modell  $\mathcal{A}$  weist  $f$  einen Wert zu.  $\mathcal{A}$  ist auch eine zu  $F$  passende Struktur.  
Um  $F$  wahr zu machen, wird eine geeignete  $x$ -Variante von  $\mathcal{A}$  benötigt, die  $\forall y (P_1(x, y) \wedge P_2(x))$  wahr macht. Dies ist genau:  $\mathcal{A}_{[x/\mathcal{A}(f)]}$ .
- Wenn  $F$  erfüllbar, gibt es  $\mathcal{A}$  mit  $\mathcal{A}(F) = 1$ . Wir gehen davon aus, dass  $\mathcal{A}$  minimal in folgendem Sinne ist:  $\mathcal{A}$  ist genau für die Konstanten definiert, die für die Interpretation von  $F$  benötigt werden. Zu konstruieren ist ein Modell für  $F'$ .  
Da  $\mathcal{A}(F) = 1$ , gibt es eine  $x$ -Variante von  $\mathcal{A}$ , die  $\forall y (P_1(x, y) \wedge P_2(x))$  wahr macht, etwa  $\mathcal{A}_{[x/d]} (\forall y (P_1(x, y) \wedge P_2(x))) = 1$ .  
 $\mathcal{A}'$  wird als eine Erweiterung von  $\mathcal{A}$  definiert, bei der zusätzlich  $\mathcal{A}'(f) = d$  gesetzt wird. Dann gilt:  $\mathcal{A}'(F') = 1$

Sei  $F$  in BPF:  $F = \forall y_1 \forall y_2 \dots \forall y_k \exists z G$

und  $F'$  sei durch Skolemisierung bzgl.  $\mathcal{Q}_{k+1}$  entstanden:

$$F' = \forall y_1 \forall y_2 \dots \forall y_k G[z/f(y_1, \dots, y_k)]$$

**Lemma:**  $F$  und  $F'$  sind erfüllbarkeitsäquivalent.

→ Beweis siehe Schöning.

---

**Skolemform**

---

**Verfahren zur Erstellung der Skolemform:**

Sei  $F$  in BPF

**while**  $F$  enthält Existenzquantor **do**

**begin**

Sei  $F = \forall y_1 \forall y_2 \dots \forall y_k \exists z G$  und  $G$  in BPF

Führe ein neues  $k$ -stelliges Funktionssymbol ein und setze:

$$F = \forall y_1 \forall y_2 \dots \forall y_k G'[z/f(y_1, \dots, y_k)]$$

**end**

Als **Skolemform** wird eine BPF bezeichnet, bei der keine Existenzquantoren auftreten.

**Satz (Existenz einer erfüllbarkeitsäquivalenten Skolemform)**

Für jede Formel  $F$  in BPF existiert eine Skolemform  $F'$ , die erfüllbarkeitsäquivalent zu  $F$  ist.

---

## Klauselnormalform für die Prädikatenlogik

---

### Umformungsschritte

F	Bereinigung: Umbenennen der gebundenen Variablen	
F <sub>1</sub>	bereinigt	$F \equiv F_1$
	Bindung aller freien Variablen durch Existenzquantoren	
F <sub>2</sub>	bereinigt, geschlossen	$F_1$ erfüllbarkeitsäquivalent $F_2$
	Erstellung einer Pränexform	
F <sub>3</sub>	BNF, geschlossen	$F_2 \equiv F_3$
	Skolemisierung	
F <sub>4</sub>	Skolemform, geschlossen	$F_3$ erfüllbarkeitsäquivalent $F_4$
	Umformung der Matrix in KNF	
F <sub>5</sub>	Klauselnormalform	$F_4 \equiv F_5$

- F und F<sub>5</sub> sind erfüllbarkeitsäquivalent.
- F<sub>5</sub> enthält keine Existenzquantoren und keine freien Variablen, d.h. alle Variablen von F<sub>5</sub> sind allquantifiziert. → Die Matrix von F<sub>5</sub> enthält alle relevante Information. → Der Präfix der Allquantoren kann gestrichen werden.