

Aufgabe 33

a) Es gilt $f_n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $f_n(0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Für $x > 0$ gilt

$$f_n(x) = \frac{x + nx^2 + nx}{1 + nx} = \frac{x/n + x^2 + x}{1/n + x} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{x} = x + 1.$$

Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert also punktweise gegen die Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x + 1, & x > 0. \end{cases}$$

Auf dem Intervall $[0, \infty)$ kann die Konvergenz nicht gleichmäßig sein, da die Funktion f in 0 unstetig ist, alle f_n dort aber stetig sind. (Wäre die Konvergenz gleichmäßig, so würde sich die Stetigkeit auf die Grenzfunktion übertragen.)

Betrachtet man das Intervall $[a, \infty)$, so liegen die Dinge anders. Dort gilt nämlich

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| \frac{x + nx^2 + nx}{1 + nx} - (x + 1) \right| = \left| \frac{x + nx^2 + nx - (x + 1)(1 + nx)}{1 + nx} \right| \\ &= \left| \frac{x + nx^2 + nx - x - nx^2 - 1 - nx}{1 + nx} \right| = \left| \frac{-1}{1 + nx} \right| \leq \frac{1}{1 + na} =: \alpha_n, \end{aligned}$$

und da (α_n) eine (von x unabhängige) Nullfolge ist, folgt die gleichmäßige Konvergenz.

b) Offenbar gilt $f_n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $x \in (0, 1]$ ist $q := 1 - x \in [0, 1)$ und es ergibt sich

$$f_n(x) = nxq^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

(Wegen $\sqrt[n]{nq^n} \rightarrow q < 1$ konvergiert die Reihe über nq^n , was dann $nq^n \rightarrow 0$ impliziert.) Die Funktionenfolge konvergiert also punktweise gegen die Funktion f mit $f(x) = 0$.

Obwohl diese Grenzfunktion stetig ist, liegt auf $[0, 1]$ keine gleichmäßige Konvergenz vor: Es gilt

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n \cdot \frac{1}{n} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-1}.$$

Das bedeutet aber, dass $f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) = f_n\left(\frac{1}{n}\right)$ nicht gegen 0 konvergiert, und in der Übung haben wir gesehen, dass dies die gleichmäßige Konvergenz ausschließt.

Auf dem Intervall $[\varepsilon, 1]$ haben wir jedoch gleichmäßige Konvergenz: Dort gilt

$$|f_n(x) - f(x)| = f_n(x) = nx(1-x)^n \leq n \cdot 1 \cdot (1-\varepsilon)^n =: \alpha_n,$$

und (α_n) ist wegen $0 < 1 - \varepsilon < 1$ eine Nullfolge.

c) Setzt man $x = 0$ ein, so hat die Reihe den Wert 0. Für $x \neq 0$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n = x^2 \frac{1}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = x^2 \frac{1+x^2}{1+x^2-1} = 1+x^2.$$

Die Funktionenreihe konvergiert somit punktweise gegen die Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1+x^2, & x \neq 0. \end{cases}$$

Da diese Funktion an der Stelle $x = 0$ unstetig ist, im Gegensatz zu den aufsummierten Funktionen, folgt wiederum, dass die Konvergenz auf \mathbb{R} nicht gleichmäßig ist.

d) Wegen $1 + x + x^2 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ gilt $1 + x + x^2 \geq \frac{3}{4}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Folglich hat man

$$|e^{-n(1+x+x^2)}| = e^{-n(1+x+x^2)} \leq e^{-3n/4} =: c_n \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Da die Reihe über $c_n = (e^{-3/4})^n$ wegen $e^{-3/4} < 1$ konvergiert, liefert das Weierstraßsche Majorantenkriterium die gleichmäßige (und damit auch die punktweise) Konvergenz auf ganz \mathbb{R} , insbesondere also auf dem Intervall $(-\infty, 0)$.

Aufgabe 34

a) In der Übung wurde die Funktion $g(y) := |y|^3$ auf Differenzierbarkeit untersucht: Sie ist auf ganz \mathbb{R} differenzierbar und es gilt

$$g'(y) = \begin{cases} 3y^2, & y \geq 0, \\ -3y^2, & y < 0. \end{cases}$$

Setzen wir $h(x) := x^2 - 4$, so ist $f(x) = g(h(x))$. Weil h überall differenzierbar ist, liefert die Kettenregel, dass f auf ganz \mathbb{R} differenzierbar ist, mit

$$f'(x) = g'(h(x))h'(x) = 2x g'(x^2 - 4) = \begin{cases} 6x(x^2 - 4)^2, & |x| \geq 2, \\ -6x(x^2 - 4)^2, & |x| < 2. \end{cases}$$

b) Setzt man $g(x) := x^x = e^{x \log x}$, so ist $f(x) = x^{g(x)} = e^{g(x) \log x}$. Anwenden von Ketten- und Produktregel liefert zunächst

$$g'(x) = e^{x \log x} (x \log x)' = x^x (1 \cdot \log x + x \cdot x^{-1}) = (1 + \log x)x^x \quad \text{für } x > 0$$

und dann die Differenzierbarkeit von f auf ganz D mit

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{g(x) \log x} (g(x) \log x)' \\ &= x^{(x^x)} (g'(x) \log x + g(x) x^{-1}) = x^{(x^x)} ((1 + \log x)x^x \log x + x^{x-1}). \end{aligned}$$

c) Mit Produkt- und Kettenregel ergibt sich die Differenzierbarkeit auf ganz D sowie

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2 + 1)' e^{x^5} + (x^2 + 1) (e^{x^5})' \\ &= 2x e^{x^5} + (x^2 + 1) e^{x^5} \cdot 5x^4 = (5x^6 + 5x^4 + 2x) e^{x^5}. \end{aligned}$$

d) Auf $(0, 1)$ liefert die Produktregel die Differenzierbarkeit; es gilt

$$f'(x) = (x^2)' g(x) + x^2 g'(x) = 2x g(x) + x^2 g'(x) \quad \text{für } x > 0.$$

Auch in $x = 0$ ist f differenzierbar mit $f'(0) = 0$; es ergibt sich nämlich

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 g(x) - 0}{x} = x g(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

wegen der Beschränktheit der Funktion g .

Aufgabe 35

3

(a)

Für $t < 0$ trifft die Aussage nicht zu, denn in diesem Falle gilt $x^t \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow 0$. Für $t = 0$ ist sie hingegen offenbar richtig.

Wir müssen im folgenden also nur noch den Fall $t > 0$ betrachten: Logarithmieren wir die Abschätzung $e^x > x^t$, so ergibt sich

$$x > \ln(x^t) = t \ln x, \quad \text{also} \quad t^{-1} > \frac{\ln x}{x}.$$

Setzen wir $g(x) := (\ln x)/x$, so lässt sich unsere Frage wie folgt umformulieren: Für welche $t > 0$ nimmt g nur Werte $< t^{-1}$ an?

Für $x \in (0, 1]$ gilt $g(x) \leq 0$. Aus $g'(x) = (\frac{1}{x} \cdot x - \ln x)/x^2 = (1 - \ln x)/x^2$ können wir folgendes schließen: Für $x \in (1, e)$ ist $g(x) > 0$, also g monoton steigend, für $x \in (e, \infty)$ ist $g(x) < 0$, also g monoton fallend. Die Funktion erreicht ihr Maximum somit an der Stelle $x = e$ mit $g(e) = e^{-1}$. Also: Genau dann nimmt g nur Werte $< t^{-1}$ an, wenn $e^{-1} < t^{-1}$, also $e > t$.

Die Antwort auf die Frage lautet: Die Aussage gilt genau dann, wenn $0 \leq t < e$.

(b) (i) Sei: $f: [-3, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$
und $M_1 := \{ f(x) : x \in [-3, 2] \}$.

Die Funktion ist auf dem gesamten Intervall differenzierbar. In jedem Maximum oder Minimum im Innern des Intervalls verschwindet daher die Ableitung. D.h.

$$f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2) = 0.$$

Die Nullstellen dieser Funktion sind 0 und $\pm\sqrt{2}$. Wir müssen also diese drei Stellen untersuchen (die auch alle im Intervall liegen!), außerdem noch die Ränder des Intervalls: $f(0) = 2$, $f(\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}) = -2$, $f(-3) = 47$, $f(2) = 2$. Das Maximum ist folglich 47, das Minimum ist -2.

von M_1
(ii) Sei: $f: [0, 10] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -6x + (|x-3|+2)^2$
und $M_2 := \{ f(x) : x \in [0, 10] \}$
von M_1

Die Funktion ist, außer in 3 differenzierbar. Wir müssen also die Randpunkte, den Punkt 3 und alle Punkte im Innern des Intervalls untersuchen, an denen die Ableitung verschwindet.

Auf $[0, 3]$ gilt

$$f(x) = -6x + (3-x+2)^2 = -6x + (5-x)^2 = x^2 - 16x + 25, \quad \text{also} \quad f'(x) = 2x - 16.$$

$f'(x) = 0$ gilt nur für $x = 8$, das ist aber nicht im Intervall $[0, 3]$. Also hat f' in $[0, 3]$ keine Nullstelle. Auf $[3, 10]$ gilt

$$f(x) = -6x + (x-1)^2 = x^2 - 8x + 1, \quad \text{also} \quad f'(x) = 2x - 8.$$

$f'(x) = 0$ gilt nur für $x = 4 \in (3, 10)$. Wir müssen also die Punkte 0, 3, 4, 10 untersuchen. $f(0) = 25$, $f(3) = -14$, $f(4) = -15$, $f(10) = 21$. Also ist -15 das Minimum und 25 das Maximum von M_2 .

Aufgabe 36

(4)

(a) Wir benutzen den verallgemeinerten Mittelwertsatz: (siehe z. B. Heuser, Analysis 1, S. 284)

" $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ seien stetig und auf (a, b) diffbar. Ferner sei $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Dann ist $g(b) \neq g(a)$ und es gibt ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Mit $f(x) = e^{x^2}$ und $g(x) = x^2$ gilt
 $f'(x) = 2xe^{x^2}$ und $g'(x) = 2x$.

Für $y > x > 0$ gilt mit einem $\xi \in (x, y)$:

$$\begin{aligned} e^{y^2} - e^{x^2} &= f(y) - f(x) = (g(y) - g(x)) \cdot \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \\ &= (y^2 - x^2) \cdot \frac{2\xi e^{\xi^2}}{2\xi} = (y-x)(x+y) e^{\xi^2} \\ &\leq (y-x)(x+y) e^{y^2} \end{aligned}$$

$\xi \mapsto e^{\xi^2}$ mon.
wachsend auf
 (x, y)

(b) Mit $f(x) = e^{1/x}$, $g(x) = \frac{1}{x}$ gilt

$f'(x) = -\frac{e^{1/x}}{x^2}$, $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$ und nach dem

verallgemeinerten MWS gibt es ein $\xi \in (x, y)$ mit

$$\begin{aligned} e^{1/x} - e^{1/y} &= f(x) - f(y) = (g(x) - g(y)) \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) \cdot \frac{-\frac{e^{1/\xi}}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}} \\ &= \left(\frac{y-x}{xy}\right) e^{1/\xi} \stackrel{x < \xi < y}{\leq} \frac{y-x}{x^2} e^{1/x} \leq \frac{y-x}{x^2} e^{1/x}, \text{ da } \xi > x. \end{aligned}$$

(c) Mit dem Mittelwertsatz und
mit $f(x) = x \log x$, $f'(x) = 1 + \log x$
folgt: es ex. ein $\xi \in (x, y)$ mit:

$$y \log y - x \log x = (y - x)(1 + \log \xi)$$
$$\leq (y - x)(1 + \log y).$$

$\xi \mapsto \log \xi$
mon. wachsend