Lösungen zum 15. Übungsblatt

Aufgabe 57

(a)(i) Sei $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = -\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$ $(n \in \mathbb{N})$

Dann: $$\frac{x_n}{x_n + y_n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = n$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x_n}{x_n + y_n} = n \longrightarrow \infty \quad (n \to \infty)$$

Der Grenzwert (i) existiert nicht.

(ii) $$\frac{\sqrt{x^2 + (y-2)^2 + 1} - 1}{x^2 + (y-2)^2} = \frac{x^2 + (y-2)^2 + 1 - 1}{(x^2 + (y-2)^2)(\sqrt{x^2 + (y-2)^2 + 1} + 1)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y-2)^2 + 1} + 1}$$

Für jede Folge $(x_n, y_n) \longrightarrow (0,2)$ gilt

$\sqrt{x_n^2 + (y_n - 2)^2 + 1} \longrightarrow 1$, also

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sqrt{x^2 + (y-2)^2 + 1} - 1}{x^2 + (y-2)^2} = \lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y-2)^2 + 1} + 1}$$

$$= \frac{1}{2}.$$

(iii) Sei $x_n = 4 + \frac{1}{n}$, $y_n = 4 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$ $(n \in \mathbb{N})$

$$\Rightarrow \quad \frac{4 - x_n}{y_n - x_n} = \frac{-\frac{1}{n}}{4 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - 4 - \frac{1}{n}} = \frac{-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = -n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$$

Der Grenzwert ex. nicht.

(2)

(iv) Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $y^2 \neq 4x^2$ und $y>0$ gilt:

$$\frac{2(2x+y)\log(x^2y^3)}{y^2-4x^2} = \frac{2(2x+y)\log(x^2y^3)}{(y+2x)(y-2x)} = \frac{2\log(x^2y^3)}{y-2x}$$

Für jede Folge (x_n, y_n) im Definitionsbereich des Ausdrucks $\log(x^2y^3)(y^2-4x^2)^{-1}$ mit $(x_n, y_n) \to (-\frac{1}{2}, 1)$ gilt:

$$\frac{2(2x_n+y_n)\log(x_n^2y_n^3)}{y_n^2-4x_n^2} = \frac{2\log(x_n^2y_n^3)}{y_n-2x_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2\log((-\frac{1}{2})^2 \cdot 1^3)}{1-2(-\frac{1}{2})}$$
$$= \frac{2\cdot\log\frac{1}{4}}{2}$$
$$= \log\frac{1}{4}$$

$\Rightarrow \exp(\cdots) \xrightarrow[n\to\infty]{} \exp(\log(\frac{1}{4})) = 1/4$,

wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion.

(b) Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ sind f und g als Kompositionen stetiger Funktionen stetig!

Für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt:

$$|f(x,y)| = \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^2|y|}{x^2+y^2} \leq \frac{x^2|y|}{x^2} = |y|$$

falls $x \neq 0$ und $|f(x,y)| = 0$ falls $x=0$, $y\neq 0$.

Insgesamt: $|f(x,y)| \leq |y|$ für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.
(Beachte $f(0,0)=0$!)

Sei (x_n,y_n) eine Folge, $(x_n,y_n) \to (0,0)$ $(n\to\infty)$.

Dann: $|f(x_n,y_n)| \leq |y_n| \longrightarrow 0$ $(n\to\infty)$.

$\Longrightarrow f$ stetig in $(0,0)$.

Sei nun $x_n = n^{-\alpha}$, $y_n = n^{-\beta}$, $\alpha, \beta > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow (x_n, y_n) \longrightarrow (0,0) \quad (n \to \infty)$.

$$g(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n^{2\alpha}} \cdot \frac{1}{n^{\beta}}}{\frac{1}{n^{4\alpha}} + \frac{1}{n^{2\beta}}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{n^{4\alpha}} + \frac{1}{n^{2\beta}}\right) n^{2\alpha+\beta}}$$

$$= \frac{1}{n^{-4\alpha+2\alpha+\beta} + n^{-2\beta+2\alpha+\beta}} = \frac{1}{n^{-2\alpha+\beta} + n^{2\alpha-\beta}}$$

[Wähle $\alpha = 1, \beta = 2 \Rightarrow -2\alpha + \beta = -2+2 = 0$]

$$= \frac{1}{1}$$

$\Rightarrow g(x_n, y_n) \not\longrightarrow 0 = g(0,0) \quad (n \to \infty)$

$\Rightarrow$ g unstetig in $(0,0)$.

<u>Aufgabe 58</u>

(a) Es ist zu zeigen: $\forall a \in B(x,r)\ \exists \varepsilon = \varepsilon(a) > 0$ mit $U_\varepsilon(a) \subseteq B(x,r)$.

Dabei ist $U_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x-a\| < \varepsilon\}$ die (offene) ε-Umgebung von a.

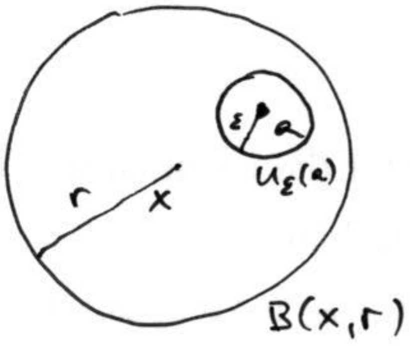
[Bemerkung: In dieser Vorlesung sind die Definitionen von "offene Kugel" und "offene Umgebung" identisch.]

<u>Bew</u>: Sei $a \in B(x,r)$ beliebig. Dann gilt $\|a-x\| < r$. Wähle $\varepsilon = \frac{r - \|x-a\|}{2}$. Wir zeigen nun $U_\varepsilon(a) \subseteq B(x,r)$. Sei $y \in U_\varepsilon(a)$. Dann:

$$\|x-y\| = \|x - a + a - y\| \leq \|x-a\| + \|y-a\| < \|x-a\| + \frac{r - \|x-a\|}{2}$$

$= \frac{\|x-a\|+r}{2} < \frac{r+r}{2} = r$, also $y \in B(x,r)$.

Skizze:



(b) Sei $M_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x>0,\ y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)\} \cup \{(0,0)\}$.

Dann gilt $(0,1) \in \mathbb{R}^2 \setminus M_1$. Wäre M_1 abgeschlossen, so wäre $\mathbb{R}^2 \setminus M_1$ offen und es würde ein $\varepsilon > 0$ existieren mit $U_\varepsilon((0,1)) \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus M_1$.
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Betrachte $x_k = \left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right)^{-1}$.
Dann gilt für alle k mit $\frac{1}{k} < \varepsilon$:

$$(x_k, y_k) = \left(\frac{1}{(2k+1)\frac{\pi}{2}},\ 1\right) \in U_\varepsilon((0,1)) \cap M_1.$$

Somit existieren für jedes $\varepsilon > 0$ Punkte $(x_k, y_k) \in U_\varepsilon((0,1)) \cap M_1$. $\mathbb{R}^2 \setminus M_1$ kann somit nicht offen sein. Also ist M_1 nicht abgeschlossen.

(c) Wir benutzen Satz 15.2.
Sei $M_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\} \cup \{(0,0)\}$.
Sei $(x_n, y_n) \in M_2$ mit $(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x,y) \in \mathbb{R}^2$.
z.z. $(x,y) \in M_2$.
Fall 1: $x = 0$: Falls $x_n \to 0$ $(n \to \infty)$, so gilt
$|y_n| = \left|x_n \sin\left(\frac{1}{x_n}\right)\right| \leq |x_n| \to 0$ $(n \to \infty)$ falls $x_n \neq 0$.
i.e. $y_n \to 0$ $(n \to \infty)$, somit $\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (0,0) \in M_2$.

Fall 2: $x > 0$. Da die Funktion $x \mapsto x \sin \frac{1}{x}$ stetig auf $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, gilt

$$y_n = x_n \sin \frac{1}{x_n} \longrightarrow x \sin \frac{1}{x} = y, \text{ falls } x_n \to x.$$

somit gilt $\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (x, x\sin\frac{1}{x}) = (x, y) \in M_2$.

Also ist M_2 abgeschlossen.

(d) Sei $(x,y) \in [0,1]^2 \setminus \mathbb{Q}^2$. Wie wir wissen ex. für alle $\varepsilon > 0$ eine rationale Zahl $a \in \mathbb{Q}$ mit $|x-a| < \frac{\varepsilon}{2}$, sowie ein $b \in \mathbb{Q}$ mit $|y-b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Der Punkt $(a,b) \notin [0,1]^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ liegt in der offenen ε-Umgebung $U_\varepsilon((x,y))$ von (x,y). Damit gibt es keine ε-Umgebung von (x,y), die vollständig in $[0,1]^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ wäre. $[0,1]^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ ist somit nicht offen.

$[0,1]^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ ist aber auch nicht abgeschlossen. Denn andernfalls wäre

$M_3 := \mathbb{R}^2 \setminus ([0,1]^2 \setminus \mathbb{Q}^2)$ offen. Es gilt

$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in \mathbb{Q}^2 \cap [0,1]^2 \Rightarrow (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in M_3$.

Da jedoch für jedes $\frac{1}{4} > \varepsilon > 0$ ein $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ existiert mit $|\frac{1}{2} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, so liegt $(\frac{1}{2}+a, \frac{1}{2}+a)$ in $[0,1]^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ aber nicht in M_3. In jeder ε-Umgebung von $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in M_3$ existieren also Punkte $\notin M_3$. M_3 ist also nicht offen und damit $[0,1]^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ nicht abgeschlossen.

Aufgabe 59

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

$$\Rightarrow \|AB\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{p} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right|^2$$

$$\underset{\substack{\text{CSU} \\ \text{(Satz 14.1 (5))}}}{\leq} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{p} \left\{ \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 \right)}_{\text{unabh. von } j} \left(\sum_{k=1}^{n} b_{kj}^2 \right) \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 \right) \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{n} b_{kj}^2 \right)$$

$$= \|A\|^2 \|B\|^2$$

Aufgabe 60

Für die n-te Partialsumme gilt nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \underset{\text{CSU}}{\leq} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \right)^{1/2} < \infty$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \right)^{1/2}.$$