

# Lösungen zum 14. Übungsblatt

(1)

## Aufgabe 40

$$\begin{aligned}(f * f)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)f(y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 f(x-y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{x-1}^{x+1} f(z) dz\end{aligned}$$

$$|x| \geq 2 : (f * f)(x) = 0$$

$$x \in (-2, 0] : (f * f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{x+1} 1 dz = \frac{1}{2\pi} (2+x)$$

$$x \in [0, 2) : (f * f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{x-1}^1 1 dz = \frac{1}{2\pi} (2-x)$$

$$\Rightarrow (f * f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} (2 - |x|) & x \in (-2, 2) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach dem Faltungssatz gilt:  $\widehat{f * f} = \widehat{f} \cdot \widehat{f}$

Aus der Vorlesung ist bekannt:  $\widehat{f}(s) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin s}{s}$

Mit der Umkehrformel folgt schließlich:

$$(f * f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} \widehat{f * f}(s) ds = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} \left(\frac{\sin s}{s}\right)^2 ds$$

Setze  $x=0$ :

$$\frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin s}{s}\right)^2 ds = (f * f)(0) = \frac{1}{\pi} \Rightarrow \text{Beh.}$$

## Aufgabe 41

(a) Da  $f, g$  stetig und abs. int. und  $g$  beschr.,  
ex.  $f * g$  sowie  $g * f$ .

$$\begin{aligned}(f * g)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y) dy \stackrel{\substack{\uparrow \\ x-y=z}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(z)g(x-z) dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x-z)f(z) dz = (g * f)(x)\end{aligned}$$

(b) Da  $f$  stetig und  $\hat{f}$  absolut integrierbar (2) lautet die Fourier-Umkehrformel in diesem

$$\begin{aligned} f(-t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{is(-t)} \hat{f}(s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} \hat{f}(s) ds \\ &= 2\pi \widehat{\widehat{f}}(t) = 2\pi \widehat{g}(t) \Rightarrow \text{Beh.} \end{aligned}$$

(c) Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^{-|x|}$ . Aus der Vorlesung ist bekannt

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+s^2}$$

Damit und mit dem Dilationsatz gilt ( $\alpha > 0$ ):

$$\gamma_{\alpha}(s) = \frac{2\pi}{\alpha} \hat{f}\left(\frac{s}{\alpha}\right) = 2\pi \widehat{f_{\alpha}}(s), \text{ wobei } f_{\alpha}(x) := f(\alpha x).$$

Mit dem Faltungssatz folgt ( $\alpha, \beta > 0$ ):

$$\widehat{\gamma_{\alpha} * \gamma_{\beta}} = \widehat{\gamma_{\alpha}} \cdot \widehat{\gamma_{\beta}} = 4\pi^2 \widehat{f_{\alpha}} \cdot \widehat{f_{\beta}}$$

$$\stackrel{(b)}{=} f_{\alpha}(-t) \cdot f_{\beta}(-t) = e^{-\alpha|-t|} \cdot e^{-\beta|-t|}$$

$$= e^{-(\alpha+\beta)|t|} \stackrel{(b)}{=} \widehat{f_{\alpha+\beta}} \cdot 2\pi$$

$$= \widehat{\gamma_{\alpha+\beta}}$$

$$\Rightarrow \gamma_{\alpha} * \gamma_{\beta} = \gamma_{\alpha+\beta}$$

## Aufgabe 42

Da  $\phi(t) = 0$  für  $|t| > 1$  gilt  $\phi^{(n)}(t) = 0$  für  $|t| > 1$ , und  $\phi^{(n)}$  ist auf  $[-1, 1]$  stetig. Damit existieren  $\min_{t \in [-1, 1]} \phi^{(n)}(t)$  und  $\max_{t \in [-1, 1]} \phi^{(n)}(t)$ .

Nach dem Differentiationsatz gilt: (3)

$$s^n \hat{\phi}(s) = \widehat{\phi^{(n)}}(s) \cdot i^{-n}$$

$$\Rightarrow |s^n \hat{\phi}(s)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} \phi^{(n)}(x) dx \right|$$
$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\phi^{(n)}(x)| dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 |\phi^{(n)}(x)| dx$$

$\phi^{(n)} = 0$   
außerhalb  $[-1, 1]$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \cdot \max_{x \in [-1, 1]} \left\{ \left| \min_{x \in [-1, 1]} \phi^{(n)}(x) \right|, \left| \max_{x \in [-1, 1]} \phi^{(n)}(x) \right| \right\}$$

$$< \infty$$

$\Rightarrow$  Beh.