

Lösungen zum 1. Übungsblatt

1

A1 (a) Für $(x, y) \neq (0, 0)$ gilt

$$f_x(x, y) = \frac{-2xy(x^2 + y^2) - (y^3 - x^2y)2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-4xy^3}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$f_y(x, y) = \frac{(3y^2 - x^2)(x^2 + y^2) - (y^3 - x^2y)2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^4 + 4x^2y^2 + y^4}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ haben wir also

$$\text{grad } f(x, y) = \begin{pmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{pmatrix} = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} -4xy^3 \\ -x^4 + 4x^2y^2 + y^4 \end{pmatrix}.$$

Nun noch zum Nullpunkt: Definitionsgemäß gilt

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

und

$$f_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{h^3 - 0}{0 + h^2} = 1.$$

Somit ist f auch in $(0, 0)$ partiell differenzierbar mit

$$\text{grad } f(0, 0) = \begin{pmatrix} f_x(0, 0) \\ f_y(0, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$f_x(x, x) = \frac{-4x^4}{(x^2 + x^2)^2} = -1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} -1 \neq 0 = f_x(0, 0),$$

$$f_y(x, 0) = \frac{-x^4 + 0 + 0}{(x^2 + 0)^2} = -1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} -1 \neq 1 = f_y(0, 0)$$

ist weder f_x noch f_y im Punkt $(0, 0)$ stetig.

(b) $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$f_x(x, y) = \frac{2x}{(x^2 + y^2)^2} e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}}$$

$$f_y(x, y) = \frac{2y}{(x^2 + y^2)^2} e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}}$$

$(x, y) = (0, 0)$:

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} = 0$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} = 0$$

Es gilt: $|f_x(x, y)| \rightarrow 0, (x, y) \rightarrow (0, 0)$

$|f_y(x, y)| \rightarrow 0, (x, y) \rightarrow (0, 0)$

Somit ist $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

Beachte $\lim_{\xi \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{\xi^m}}}{\xi^u} = 0 \quad (m, u \in \mathbb{N})$

A2 (a) Die partiellen Ableitungen erster Ordnung sind

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 4xy^2 + 4y^3 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -4x^2y + 12xy^2 + 4y^3.$$

Daraus ergibt sich für die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= 6x - 4y^2, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= -4x^2 + 24xy + 12y^2, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) &= -8xy + 12y^2, & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= -8xy + 12y^2. \end{aligned}$$

Bemerkung: Dass $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ gilt, war wegen des Satzes von Schwarz schon vorher klar, denn die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ist zweimal stetig differenzierbar.

Es ist offensichtlich $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

(b) Hier haben wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2xe^{xy} + (x^2 + y^2)ye^{xy} = (x^2y + 2x + y^3)e^{xy}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 2ye^{xy} + (x^2 + y^2)xe^{xy} = (x^3 + xy^2 + 2y)e^{xy}. \end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung lauten

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= (2xy + 2)e^{xy} + (x^2y + y^3 + 2x)ye^{xy} = (x^2y^2 + 4xy + y^4 + 2)e^{xy}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= (2xy + 2)e^{xy} + (x^3 + xy^2 + 2y)xe^{xy} = (x^4 + x^2y^2 + 4xy + 2)e^{xy}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= (3x^2 + y^2)e^{xy} + (x^3 + xy^2 + 2y)ye^{xy} = (x^3y + 3x^2 + xy^3 + 3y^2)e^{xy} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} f(x, y). \end{aligned}$$

Als Kompositionen stetiger Funktionen sind die part. Abl. erster und zweiter Ordnung stetig auf \mathbb{R}^2 . Somit gilt: $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

(c) Hier sind

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = e^y/z, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = xe^y/z, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -xe^y/z^2.$$

Weiter haben wir

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) = xe^y/z, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) = 2xe^y/z^3.$$

Und schließlich noch die gemischten Ableitungen zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y, z) &= e^y/z = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x, y, z) &= -e^y/z^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, y, z), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x, y, z) &= -xe^y/z^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, z). \end{aligned}$$

Als Komposition stetiger Funktionen sind die part. Abl. erster und zweiter Ordnung stetig auf $\mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$. Somit:
 $f \in C^2(\mathbb{R}^2 \times (0, \infty))$. (5)

(d) Für $(x, y) \neq (0, 0)$ ist

$$f_x(x, y) = y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy \frac{2x(x^2 + y^2) - (x^2 - y^2)2x}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$= \frac{y(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{4x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2},$$

und wegen $f(x, y) = -f(y, x)$ ergibt sich daraus

$$f_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-f(y+h, x) + f(y, x)}{h}$$

$$= -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(y+h, x) - f(y, x)}{h} = -f_x(y, x) = -\frac{y^4 x + 4y^2 x^3 - x^5}{(y^2 + x^2)^2}.$$

Für $(x, y) \neq (0, 0)$ gilt also

$$\text{grad } f(x, y) = \begin{pmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{pmatrix} = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5 \\ x^5 - 4x^3 y^2 - xy^4 \end{pmatrix}.$$

Für die partiellen Ableitungen von f im Nullpunkt erhalten wir

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

und

$$f_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0+h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0-0}{h} = 0.$$

Somit ist $\text{grad } f(0, 0) = (0, 0)$.

Die partiellen Abl. zweiter Ordnung:

$(x, y) \neq (0, 0)$:

$$f_{xx}(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)(4x^3 y + 8xy^3) - (x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5) \cdot 4x}{(x^2 + y^2)^3}$$

$$f_{yy}(x, y) = -\frac{(x^2 + y^2)(4y^3 x + 8yx^3) - (y^4 x + 4y^2 x^3 - x^5) \cdot 4y}{(x^2 + y^2)^3}$$

$$f_{xy}(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)(x^4 + 12x^2 y^2 - 5y^4) - (x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5) \cdot 4y}{(x^2 + y^2)^3}$$

$$f_{yx}(x, y) = f_{xy}(x, y)$$

$$(x, y) = (0, 0):$$

(4)

Es ist $f_{xx}(0,0) = 0$, $f_{yy}(0,0) = 0$ und

$$f_{xy}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(h,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{h^5 - 0 - 0}{(h^2 + 0)^2} = 1$$

sowie

$$f_{yx}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(0,h) - f_x(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(0,h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 + 0 - h^5}{h(0 + h^2)^2} = -1.$$

Es gilt: $f \notin C^2(\mathbb{R}^2)$, denn sonst müßte nach dem Satz von Schwarz

$$f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0) \text{ sein } \downarrow.$$

A3

$$(a) \quad f(x,y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2x = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{1}{x^2 + y^2} + x \cdot \frac{(-1)}{(x^2 + y^2)^2} \cdot 2x$$

$$= \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} (y^2 - x^2 + x^2 - y^2) = 0$$

(12) Man beachte: $\frac{\partial}{\partial x_i} \|x\| = \frac{x_i}{\|x\|}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(nachrechnen).

Daraus: $\frac{\partial f}{\partial x_i} = -(n-2) \cdot \|x\|^{-n+1} \cdot \frac{x_i}{\|x\|} = -(n-2) \cdot \|x\|^{-n} x_i$

$f(x) = \|x\|^{-n+2}$
 $= \|x\|^{-n+2}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = (n-2)n \|x\|^{-n-1} \frac{x_i^2}{\|x\|^2} - (n-2) \|x\|^{-n}$

$\Rightarrow \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} = (n-2) \sum_{j=1}^n \left(n \|x\|^{-n-2} x_j^2 - \|x\|^{-n} \right)$

$= (n-2) \left[n \|x\|^{-n-2} \sum_{j=1}^n x_j^2 - \|x\|^{-n} \cdot n \right] = 0$