Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. G. Herzog
Dipl.phys. M. Radosz

WS 2010/11

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

9. Übungsblatt

Abgabe bis Freitag, 07.01.2011, 12.30 Uhr

Aufgabe 33 (K). Untersuchen Sie die nachstehenden Funktionenfolgen und Funktionenreihen in den angegebenen Intervallen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

(a) $f_n(x) = \dfrac{x + nx^2 + nx}{1 + nx}$ auf $I_1 = [0, \infty)$ bzw. auf $I_2 = [a, \infty)$ mit einem festen $a > 0$

(b) $f_n(x) = nx(1-x)^n$ auf $I_1 = [0,1]$ bzw. auf $I_2 = [\epsilon, 1]$ mit einem festen $\epsilon \in (0,1)$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ auf $I = \mathbb{R}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n(1+x+x^2)}$ auf $I = (-\infty, 0)$

Aufgabe 34 (K). Bestimmen Sie jeweils alle $x \in I$, in denen die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist, und berechnen Sie für diese x die Ableitung $f'(x)$.

(a) $I = \mathbb{R}, \quad f(x) = |x^2 - 4|^3$

(b) $I = (0, \infty), \quad f(x) = x^{(x^x)}$

(c) $I = [0, 1], \quad f(x) = (x^2 + 1)e^{x^5}$

(d) $I = [0, 1), \quad f(x) = \begin{cases} x^2 g(x), & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

In Teil (d) sei $g : (0, 1) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare und beschränkte Funktion.

Aufgabe 35.

(a) Für welche Zahlen $t \in \mathbb{R}$ gilt die folgende Aussage?

$$\text{Für alle } x > 0 \text{ ist } e^x > x^t.$$

(b) Berechnen Sie Maximum und Minimum folgender Mengen.

(i) $\{x^4 - 4x^2 + 2 : \ x \in [-3, 2]\}$

(ii) $\{-6x + (|x-3| + 2)^2 : \ x \in [0, 10]\}$

bitte wenden!

Aufgabe 36. Zeigen Sie für alle $y > x > 0$:

(a) $e^{y^2} - e^{x^2} \le (y-x)(x+y)e^{y^2}$

(b) $e^{1/x} - e^{1/y} \le (y-x)\dfrac{e^{1/x}}{x^2}$

(c) $y \log y - x \log x \le (y-x)(1+\log y)$

$* * * * * * * * *$ $\mathcal{F}$rohe $\mathcal{W}$eihnachten und ein gutes $\mathcal{N}$eues $\mathcal{J}$ahr! $* * * * * * * * *$

Why is ten afraid of seven?

$\star$

$**$

$** \uparrow$

$* * \bullet *$

$\circ * ** \uparrow *$

$\uparrow * * \circ * * * *$

$* * \circ * * \circ * \bullet * * * \circ$

$\bigcap$

$**$Because seven ate nine.