Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. G. Herzog
Dipl.phys. M. Radosz

WS 2010/11

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

15. Übungsblatt

Ferienübungsblatt, keine Abgabe!

Aufgabe 57. Untersuchen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren und geben Sie diese im Fall der Existenz an.

(a) (i) $\lim_{(x,y)\to 0} \frac{x}{x+y}$

(ii) $\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sqrt{x^2+(y-2)^2+1}-1}{x^2+(y-2)^2}$

(iii) $\lim_{(x,y)\to(4,4)} \frac{4-x}{y-x}$

(iv) $\lim_{(x,y)\to(-\frac{1}{2},1)} \exp\left(\frac{2(2x+y)\log(x^2y^3)}{y^2-4x^2}\right).$

(b) Untersuchen Sie die folgenden auf $\mathbb{R}^2$ definierten Funktionen auf Stetigkeit.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Aufgabe 58. Zeigen Sie:

(a) Die offene Kugel $B(x,r) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|x-y\| < r\}$ ist offen.

(b) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x > 0,\ y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right\} \cup \{(0,0)\}$ ist nicht abgeschlossen.

(c) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x > 0,\ y = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right\} \cup \{(0,0)\}$ ist abgeschlossen.

(d) Die Menge $[0,1]^2 \setminus \mathbb{Q}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ ist weder offen noch abgeschlossen.

Aufgabe 59. Es seien $m,n,p \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$. Zeigen Sie:

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

Aufgabe 60. Zeigen Sie die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung für Reihen: Für Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n, b_n \geq 0$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty, \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 < \infty$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\right)^{1/2}.$$