[49] K Zu f. $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \Rightarrow k!\,x$ ist immer ($\forall k \in \mathbb{N}$) irrational $\Rightarrow \pi k!\,x$ ist nie ein ganzzahliges Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ ~~|cos(πk!x)| ist~~ für kein k ist $|\cos(\pi k!\,x)| = 1 \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}$:
$\lim_{m\to\infty}(\cos(\pi k!\,x))^{2m} = 0 \Rightarrow f(x) = 0$ für $x \in [0,1]\setminus\mathbb{Q}$.

Zu $\frac{p}{q} = x \in \mathbb{Q}\cap[0,1]$ ist spätestens ab $k = q$ die Zahl $k!\cdot x \in \mathbb{Z} \Rightarrow |\cos(\pi k!\,x)| = 1$
denn $(\forall k \geq q)$: $k!\,x = \frac{k!}{q}\cdot p \in \mathbb{Z}) \Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}_0\ \forall k \geq q: (\cos(\pi k!\,x))^{2m} = 1$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \text{ irrational} \\ 1 & \text{für } x \text{ rational} \end{cases} \quad \left(= \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x),\ \text{Dirichlet-Funktion}\right)$$

Zu g: für $x \in [0,1]\cap\mathbb{Q}$ ist $g(x) = \frac{1}{q}$, wobei q der kleinstmögliche Nenner von x ist
($x = \frac{p}{q}$ maximal gekürzt, p und q teilerfremd

Zu den Integralen. Sei $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$ eine bel. Zerlegung von $[0,1]$.

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)\cdot \sup \underbrace{f([x_k,x_{k+1}])}_{\text{enthält immer rat. Punkte}} = \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)\cdot 1 = x_n - x_0 = 1$$

$\Rightarrow$ das Infimum aller Obersummen $= \inf 1 = 1 \Rightarrow \overline{\int_0^1} f(x)\,dx = 1$

$[x_k, x_{k+1}]$ enthält auch immer irrat. Punkte $\Rightarrow \inf f([x_k,x_{k+1}]) = 0 \Rightarrow$
alle Untersummen sind 0 $\left(= \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)\cdot 0\right) \Rightarrow$ das sup aller Untersummen
(sup über alle Zerlegungen) ist $0 \Rightarrow \underline{\int_0^1} f(x)\,dx = 0 \Rightarrow f \notin R[0,1]$

$\underline{\int_0^1} g(x)\,dx = 0$ gilt exakt genauso.

Zu $\overline{\int} g$: klar: $0 = \underline{\int_0^1} g(x)\,dx \leq \overline{\int_0^1} g(x)\,dx$

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Gilt $g(x) \geq \frac{1}{n}$, dann hat x $(\in\mathbb{Q})$ einen Nenner $\leq n$, und daher gibt es nur endlich viele Möglichkeiten für x (höchstens $2 + \sum_{j=1}^{n-1}(j-1) = 2 + \frac{(n-2)(n-1)}{2} < 2 +$
Sprich: es gibt nur endlich viele Stellen x mit $g(x) \geq \frac{1}{n}$. Die Anzahl dieser Stellen sei k_n ($< 2 +$
Diese Stellen seien y_ν, $\nu = 1, \ldots, k_n$.

Sei nun Z eine Zerlegung von $[0,1]$ mit $x_j - x_{j-1} = \delta < \frac{1}{2 n k_n}$, $j = 1, \dots, m$ 13.1]2

Die Punkte y_ν können höchstens in $2k_n$ der Teilintervalle von Z liegen. Daher folgt:

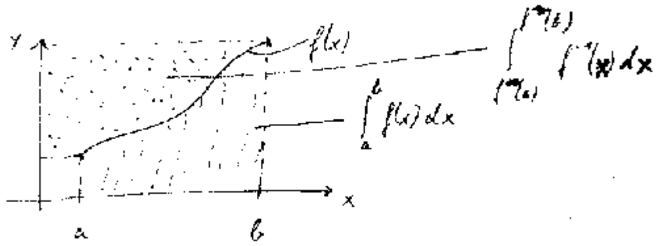
$$S_g(Z) = \sum_{j=0}^{m-1} \underbrace{\sup g([x_j, x_{j+1}])}_{\le \frac{1}{n} \text{ für die Int., die kein } y_\nu \text{ enthalten}} \cdot \underbrace{(x_{j+1} - x_j)}_{=\delta} \le \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{n} (x_{j+1} - x_j) + 2k_n \cdot 1 \cdot \delta$$

$$< \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n}$$

Folglich: $0 \le S_g(Z) - \underbrace{s_g(Z)}_{=0} < \frac{2}{n}$

Nach dem Riemannschen Integrabilitätskriterium folgt $g \in R[0,1]$ und daher $\int_0^1 g(x)\,dx = 0 (= \int_0^1$

$\boxed{50}$ Skizze:



$f \nearrow \Rightarrow f^{-1}$ auch $\nearrow$ auf $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$ (und f^{-1} ex. überhaupt)

$\Rightarrow$ beide R-integrierbar (=: Rib.) (weil monoton), außerdem beide (!) stetig.

Sei $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$ $\Rightarrow$ $\tilde{Z} := f(Z)$ ist eine von $[f(a), f(b)]$.

Wir zeigen: $S_f(Z) - s_{f^{-1}}(\tilde{Z}) = b f(b) - a f(a)$.

Beweis: $S_f(Z) = \{\text{wegen Monotonie}\} = \sum_{j=1}^{m} f(x_j)(x_j - x_{j-1})$

$$s_{f^{-1}}(\tilde{Z}) = \sum_{j=1}^{m} f^{-1}(f(x_{j-1}))(f(x_j) - f(x_{j-1}))$$

$$\Rightarrow S_f(Z) + s_{f^{-1}}(\tilde{Z}) = \sum_{j=1}^{m} [f(x_j) x_j - f(x_j) x_{j-1} + x_{j-1} f(x_j) - x_{j-1} f(x_{j-1})] =$$

$$= b f(b) - a f(a)$$

$$s_{f^{-1}}(\tilde{Z}) \le \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)\,dx = \underbrace{\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)\,dt}_{=: I_1} \Rightarrow S_f(Z) + I_1 \ge b f(b) - a f(a)$$

Z war bel. $\Rightarrow$ $\underset{\inf}{\Rightarrow}$ $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx + I_1 = \underbrace{\int_a^b f(x)\,dx + I_1}_{=: I} \ge b f(b) - a f(a)$

Analog (grüne Schrift) $\quad \eta_f(Z) + \underbrace{S_{f^{-1}}(\tilde{Z})}_{\geq \int f^{-1} = \int f^{-1} = \eta_1} = b f(b) - a f(a)$

$\Rightarrow \eta_f(Z) + \eta_1 \leq b f(b) - a f(a) \underset{\inf_Z}{\Rightarrow} \eta + \eta_1 \leq f(b) b - a f(a)$

$\Leftrightarrow$ Beh.

51 K (a) Ann.: $\exists\, \xi \in [a,b] : f(\xi) \neq 0$

f stetig, $|\cdot|$ auch $\Rightarrow^{\exists \varepsilon} \exists$ Umg. $U_\varepsilon(\xi) : |f(x)| > \varepsilon > 0$ auf $U_\varepsilon(\xi) \cap [a,b] =: J$

(Hm, naja, keine ε-Umgebung $(\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon)$)

$\Rightarrow \int_a^b |f(x)|\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx = \varepsilon \cdot \delta > 0 \quad (\delta := |J|$, Intervalllänge$)$

$g(x) := \begin{cases} \varepsilon & \text{für } x \in J \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = \varepsilon \cdot \chi_J(x)$

(|f|, g beide Rib, da stetig)

f zu $\int |f| = 0 \quad \Rightarrow$ Beh., $f = 0$

(b) Setze g speziell $g = f \in C[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)^2\,dx = 0 \overset{(a)}{\Rightarrow} f(x)^2 = 0$ in $[a,b]$

$\Leftrightarrow f = 0$

52 Zuerst $\int_a^x = \int_a^c + \int_c^x$.

„$\geq$" $\int_a^x f(t)\,dt = \inf\{S_f(Z) : Z$ ist Zel. von $[a,x]\}$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists$ Zel. Z: $S_f(Z) < \int_a^x f(t)\,dt + \varepsilon$.

Sei $\tilde{Z} := Z \cup \{c\}$ (Verfeinerung von Z) $\underset{\text{Vol.}}{\Rightarrow} S_f(\tilde{Z}) \leq S_f(Z)$.

Sei $Z_1 := \tilde{Z} \cap [a,c]$, $Z_2 := \tilde{Z} \cap [c,x] \Rightarrow S_f(\tilde{Z}) = S_f(Z_1) + S_f(Z_2) \geq \int_a^c + \int_c^x$

$\Rightarrow \int_a^x f(t)\,dt + \varepsilon \geq S_f(Z) \geq S_f(\tilde{Z}) \geq \left(\int_a^c + \int_c^x\right) f(t)\,dt$

$\varepsilon > 0$ bel. $\Rightarrow \int_a^x \geq \int_a^c + \int_c^x$

„$\leq$" $\forall \varepsilon > 0\ \exists Z_1$ von $[a,c]$, Z_2 von $[c,x]$: $S_f(Z_1) < \int_a^c f(t)\,dt + \varepsilon$, $S_f(Z_2) < \int_c^x f\,dt + \varepsilon$

$Z := Z_1 \cup Z_2$ ist Zerl. von $[a, x]$

$\Rightarrow \overline{S}_f(Z) = \overline{S}_f(Z_1) + \overline{S}_f(Z_2) < \int_a^c f\,dt + \int_c^x f(t)dt + 2\varepsilon$

$\left(\int_a^{x*} f(t)dt \leq\right)$

$\Rightarrow$ (weil $\forall \varepsilon > 0$) $\int_a^{x*} f(t)dt \leq \int_a^c f(t)dt + \int_c^x f(t)dt \Rightarrow (=)$

Jetzt zu $g(x) := \int_a^x f(t)\,dt \quad ; \quad \forall t \in [a, b] : |f(t)| \leq M$

g ist überhaupt wohldefiniert: $\int_a^x f(t)\,dt = \inf_Z \sum_{i=1}^n f(t_i)(t_i - t_{i-1})$

f ist auch beschränkt auf $[a, x]$, $Z = \{t_0 = a, t_1, \ldots, t_n = x\}$

daher existieren Unter- und Obersummen und $\underline{\int}$ und $\overline{\int}$.

Seien $x, y \in [a, b]$, oBdA $x > y$

$|g(x) - g(y)| = \left|\int_a^x - \int_a^y f(t)dt\right| = \left|\int_y^x f(t)\,dt\right| = \inf\{\overline{S}_f(Z) : Z \text{ ist Zerl. v. } [x, y]\}$

$= \left|\inf_{y = x_0 < \cdots < x_n = x} \sum_{j=1}^n \underbrace{\sup f([x_{j-1}, x_j])}_{\leq M} \cdot (x_j - x_{j-1})\right|$

$\forall t \in [a, b] : -M \leq f(t) \leq M \Rightarrow -M \leq \sup f([x_{j-1}, x_j]) \leq M$

$\Rightarrow -M\cdot(x-y) = -M \cdot \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) \leq \sum_{j=1}^n \sup \ldots (x_j - x_{j-1}) \leq M\cdot(x-y)$

Dies gilt für alle Zerlegungen $\Rightarrow -M(x-y) \leq \inf_Z \ldots\ldots \leq M(x-y) \Leftrightarrow |\inf \ldots| \leq M(x-y)$

$\Rightarrow |g(x) - g(y)| \leq M\cdot|x-y| \Rightarrow g$ Lipschitz-stetig auf $[a, b]$

$\blacksquare$