45 K $f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ 12.01.11

(a) Wir zeigen induktiv: $f^{(n)}(x) = \begin{cases} p_n(\frac{1}{x})\, f(x) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, wobei p_n ein Polynom ist.

IA: $n=0$: ✓ $(p_0(y) = 1)$

IS $n \to n+1$: für $x \neq 0$ ist $f^{(n)}$ offensichtlich db. und es gilt

$$f^{(n+1)}(x) = \left(\frac{d}{dx} f^{(n)}\right)(x) = \frac{d}{dx}\left(p_n\left(\tfrac{1}{x}\right) \cdot f(x)\right) = p_n'\left(\tfrac{1}{x}\right) \cdot \frac{-1}{x^2} \cdot f(x) + p_n\left(\tfrac{1}{x}\right) \cdot f'(x)$$

$$= f(x) \cdot \underbrace{\left(p_n\left(\tfrac{1}{x}\right) \cdot \frac{+2}{x^3} - \frac{1}{x^2} p_n'\left(\tfrac{1}{x}\right)\right)}_{=: p_{n+1}(\frac{1}{x})}$$

$p_{n+1}(y) = p_n(y) \cdot 2y^3 - y^2 p_n'(y)$ ist ein Polynom, da p_n eines ist.

Jetzt noch $x = 0$.

$$\lim_{t \to 0} \frac{f^{(n)}(t) - f^{(n)}(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{p_n(\frac{1}{t}) f(t)}{t} = \lim_{\tau \to \pm\infty} \tau \cdot p_n(\tau) \cdot e^{-\tau^2} =: L$$

p_n ist ein Polynom, also $p_n(\tau) = \sum_{j=0}^{k(n)} a_{jn} \cdot \tau^j$, $k(n) = \operatorname{grad} p_n$

$$\Rightarrow |L| \leq \sum_{j=0}^{k(n)} \lim_{\tau \to \infty} \frac{|a_{jn} \tau^{j+1}|}{e^{\tau^2}} \leq \sum_{j=0}^{k} \lim_{\tau \to \infty} \frac{|a_{jn}| \tau^{j+1}}{\frac{1}{(1+k)!} \tau^{2(k+1)}} = 0, \text{ da } 2k+2 > k+1 \geq j+1$$

$$\Rightarrow f^{(n+1)}(0) = 0 \quad \Rightarrow f \in C^\infty(\mathbb{R}) = \bigcap_{n=0}^{\infty} C^n(\mathbb{R})$$

$\Rightarrow$ Taylor-Reihe von f um 0 ist $\sum_{k=0}^{\infty} 0 \cdot x^k = 0 \neq f$. (KR ist ∞, klar)

(b) Kurvendiskussion.

Einzige Nullstelle ist 0, da $e^x > 0 \;\forall x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow f(0) = 0$ ist globales Minimum.

Sonstige Extremstellen: Notwendig ist $f'(x) = 0$ (Randextrema tauchen ja nicht auf), also $0 = e^{-1/x^2} \cdot \frac{2}{x^3}$ ↯ ($x=0$ schon erledigt) $\Rightarrow$ keine weiteren relativen, also auch keine globalen Extremstellen (oder so: $\frac{1}{x^2}$ streng fallend auf $(0,\infty) \Rightarrow e^{-1/x^2}$ streng wachsend ...)

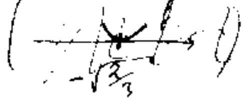
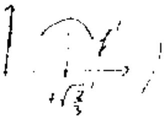
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim e^{-1/x^2} \underset{\uparrow}{=} \exp\left(\lim\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) = e^0 = 1$$

es wurde benutzt: exp stetig <u>und</u> $\lim \frac{1}{x^2}$ existiert

Wendepunkte (nicht verlangt, aber trotzdem). Das sind lokale Extremstellen der Ableitung.

$$f''(x) \underset{x\neq 0}{=} e^{-\frac{1}{x^2}}\left(\frac{4}{x^6} - \frac{6}{x^4}\right) = \underbrace{2x^{-6}e^{-x^{-2}}}_{>0}\left(2-3x^2\right) = 0 \iff x \in \left\{\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right\}$$

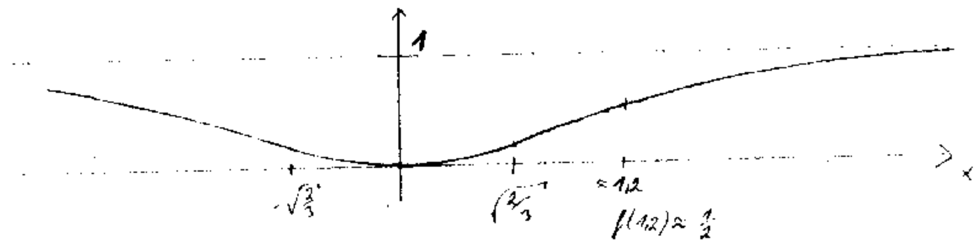
Für $|x| > \sqrt{\frac{2}{3}}$ gilt $\underset{f' \text{ fallend}}{f''(x) < 0}$, für $|x| < \sqrt{\frac{2}{3}}$: $\underset{f' \text{ wachsend (steigend)}}{f''(x) > 0}$,

$\Rightarrow f'$ hat lokales Minimum bei $-\sqrt{\frac{2}{3}}$  

Max $+\sqrt{\frac{2}{3}}$

d.h. f fällt am stärksten bei $-\sqrt{2/3}$, steigt am stärksten bei $\sqrt{2/3}$

Skizze:



$$f(x_0) = \frac{1}{2} \iff -\frac{1}{x_0^2} = \ln\frac{1}{2} \iff x_0^2 = \frac{1}{\ln 2} \iff |x_0| = (\ln 2)^{-\frac{1}{2}} \approx 1{,}2$$

Vgl. Taylor-Reihe $= 0$!

$\boxed{46}$ (b) (ii) Beh.: $|\sin x + \cos x| \leq \sqrt{2}$ $(x \in \mathbb{R})$

1. Mögl.: Beh. $\iff (\sin x)^2 + (\cos x)^2 + 2\sin x\cos x \leq 2 \iff 1 + 1\cdot\sin 2x \leq 2$ ✓

2. Mögl.: $f(x) := \sin x + \cos x$ ist 2π-periodisch und stetig (vgl. Aufgabe $\boxed{48}$) $\Rightarrow \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| =$

$= \sup_{|x|\leq\pi} |f(x)| = \max_{|x|\leq\pi} |f(x)| \Rightarrow \exists\, x_0 \in [-\pi, \pi]: \forall x \in \mathbb{R}: |f(x)| \leq |f(x_0)|$

$\Rightarrow f'(x_0) = 0$, da x_0 klarerweise Extremalstelle ist

$\iff 0 = \cos x_0 - \sin x_0 \iff \cos x_0 = \sin x_0 \Rightarrow (\cos x_0)^2 = (\sin x_0)^2 = 1 - (\cos x_0)^2 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow |f(x)| \leq |\sin x_0| + |\cos x_0| = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

3. Mögl. $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ (s. früheres Tutorium)

$\Rightarrow |\sin x + \cos x| = \sqrt{2}\left|\sin x\cos\frac{\pi}{4} + \cos x\sin\frac{\pi}{4}\right| = \sqrt{2}\left|\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| \leq \sqrt{2}\cdot 1$

46 a)

$$e = e^1 \underset{\text{Taylor}}{=} \left[\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} \left(e^{t(i)}\right)\Big|_{t=0} \cdot (x-0)^i + \left(e^t\right)^{(k+1)}\Big|_{t=\xi} \cdot (x-0)^{k+1} \cdot \frac{1}{(k+1)!} \right]_{x=1} \quad (\xi \in (0,1))$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} + 1^{k+1} \cdot \frac{1}{(k+1)!} \cdot e^{\xi} \leq \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} + \frac{e^1}{(k+1)!}$$

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \left(n!\,e - [n!\,e] \right) \leq \lim_{n\to\infty} \left(n! \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} + \frac{e}{(n+1)!} \right) - \underbrace{\left\lfloor n! \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \right\rfloor}_{\in \mathbb{N}_0} \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{e}{n+1} = 0$$

c) Betrachte $f : (-\infty, 1) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{1-x}$

47.

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x} \cdot 2} = -\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}, \quad f''(x) = -\frac{1}{4}(1-x)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f'''(x) = -\frac{3}{8}(1-x)^{-\frac{5}{2}}, \quad f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16}(1-x)^{-\frac{7}{2}}$$

Taylor $\Rightarrow \exists\, \xi \in (0, \frac{1}{50}) : f(\frac{1}{50}) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot \frac{1}{50} + \frac{f''(0)}{2!}(\frac{1}{50})^2 + \frac{f'''(0)}{3! \cdot 50^3} + \frac{f^{(4)}}{4! \cdot 5}$

$$\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{10}{7}\sqrt{1 - \frac{1}{50}} = \frac{10}{7} f(\frac{1}{50}) = \frac{10}{7}\left(1 + \frac{-1}{2 \cdot 1!} \cdot \frac{1}{50} - \frac{1}{4 \cdot 2! \cdot 50^2} - \frac{3}{8 \cdot 3!\, 50^3}\right) +$$

$$+ \frac{10}{7} \cdot \frac{-15}{16} \cdot \frac{1}{24} \cdot \frac{(1-\xi)^{-\frac{7}{2}}}{50^4} \approx \frac{10}{7} \cdot \frac{16 \cdot 50^3 - 8 \cdot 2.500 - 2 \cdot 50 - 1}{50^3 \cdot 16} = \frac{1.979.899}{1.400.000}$$

mit einem Fehler von $\frac{10 \cdot 15\ (1-\xi)^{-7/2}}{7 \cdot 16 \cdot 24 \cdot 50^4}$.

$$\xi \in (0, \tfrac{1}{50}) \Rightarrow 1 > 1-\xi > \tfrac{1}{2} \Rightarrow 1 < (1-\xi)^{-\frac{7}{2}} < (\tfrac{1}{2})^{-\frac{7}{2}} = \sqrt{2}^7 < \sqrt{2}^8 = 16$$

$$\Rightarrow \text{Fehler} < \frac{10 \cdot 15}{7 \cdot 16 \cdot 24 \cdot 50^4} \cdot 16 = \frac{10 \cdot 3 \cdot 5}{7 \cdot 50^3 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 50} = \frac{1}{7 \cdot 8 \cdot 50^3} <$$

$$< \frac{1}{50 \cdot 50^3} = \frac{1}{25^2 \cdot 10^4} < \frac{1}{10^2 \cdot 10^4} = 10^{-6}$$

46 b) (i) MWS $\Rightarrow \dfrac{\cos e^x - \cos e^y}{x-y} = \left(\dfrac{d}{dt} \cos e^t\right)\Big|_{t=\xi}, \quad \xi \in (x,y) \quad$ (obdA $x < y$)

$$\left|\left(\frac{d}{dt} \cos e^t\right)\right| = \left|-\sin e^t \cdot e^t\right| \leq 1 \cdot e^t \leq e^0 = 1 \quad (t < 0)$$

$$\Rightarrow |\cos e^x - \cos e^y| \leq 1 \cdot |x-y| \quad , (x, y \leq 0)$$