Punkte: [41] (b),(f) je 1, Rest ½ Punkt
[44] (a) 3, (b) 1 Punkt.

---

**41.** (a) $(\cot x)^{\sin x} = e^{\sin x \ln \frac{\cos x}{\sin x}}$ ; $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\ln \frac{\cos x}{\sin x}}{1/\sin x} = \{\text{de l'Hospital}\} =$

„$\infty^0$" „$0\cdot(+\infty)$"

$$= \lim \frac{\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{-(\sin x)^2-(\cos x)^2}{(\sin x)^2}}{-\frac{1}{(\sin x)^2}\cos x} = \lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{+(\cos x)^2} = \frac{0}{1} = 0$$

exp ist stetig $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0+}(\cot x)^{\sin x} = e^0 = 1$

Regel von de l'Hospital: $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$ oder $\lim g(x) = \infty$, $f, g$ db., $g' \neq 0$
$\Rightarrow \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$, falls die RS. existiert in $\overline{\mathbb{R}}$

Diese Vor. sind hier erfüllt: $\ln \frac{\cos x}{\sin x} \to \infty$ $(x\to 0+)$, $\frac{1}{\sin x} \to \infty$, $\frac{\cos x}{(\sin x)^2} \neq 0$
(„um $x=0$ herum")

(b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^x - x}{1-x+\ln x} = \lim \dfrac{e^{x\ln x} - x}{1-x+\ln x} \overset{l'H}{=} \lim \dfrac{e^{x\ln x}(\ln x+1)-1}{-1+\frac{1}{x}} \overset{l'H}{=}$

„$\frac{0}{0}$" „$\frac{0}{0}$"

$$= \lim_{x\to 1} \frac{e^{x\ln x}\left[(\ln x+1)^2 + \frac{1}{x}\right]}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{e^{1\cdot 0}\left[(0+1)^2+1\right]}{-1} = -2$$

Auch hier: Abl. des Nenners $\neq 0$ (außer bei $x=1$ selbst) — Grenzwert „danach" existiert

(c) $\dfrac{(1+x)^p}{1+x^p} = \dfrac{(\frac{1}{x}+1)^p}{\frac{1}{x^p}+1} \xrightarrow{x\to\infty} \dfrac{(0+1)^p}{0+1} = 1 \quad (p>0)$

de l'Hospital ist aufwendiger: $\lfloor p\rfloor$ mal (Induktion) anwenden $\sim \dfrac{p(p-1)\cdot\ldots\cdot(p-\lfloor p\rfloor+1)(1+x)^{p-\lfloor p\rfloor}}{\ldots x^{p-\lfloor p\rfloor}} =$

$= \left(\frac{1}{x}+1\right)^{p-\lfloor p\rfloor} \xrightarrow{x\to\infty} 1 \quad (p-\lfloor p\rfloor \geq 0)$ Blödsinn, das ist genau dasgl.

(d) $\dfrac{x^2\cos\frac{1}{x}}{\sin x} = \underbrace{\dfrac{x}{\sin x}}_{\to 1\ (x\to 0)} \cdot \underbrace{x}_{\to 0} \cdot \underbrace{\cos\frac{1}{x}}_{|\cdot|\leq 1} \xrightarrow{x\to 0} 0$

„$\frac{0}{0}$"

ⓔ $\lim\limits_{x\to 1-} \ln x \, \ln(1-x) = \lim \dfrac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\ln x}} \overset{l'H.}{=} \lim \dfrac{\frac{1}{1-x}\cdot(-1)}{-\frac{1}{(\ln x)^2}\cdot\frac{1}{x}} = \lim \dfrac{x(\ln x)^2}{1-x} =$

$\quad$ „$0\cdot(-\infty)$" $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ „$\frac{0}{0}$"

$= 1\cdot \lim \dfrac{(\ln x)^2}{1-x} \overset{l'H.}{=} \lim\limits_{x\to 1-} \dfrac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{-1} = \dfrac{2\cdot 0\cdot 1}{-1} = 0$

$\quad$ „$0/0$"

ⓕ $\left(\dfrac{\arctan x}{x}\right)^{3/x^2} = e^{\frac{3}{x^2}\ln\frac{\arctan x}{x}}$, exp stetig $\rightsquigarrow$ lim im Exponenten

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3}{x^2}\ln\dfrac{\arctan x}{x} \overset{l'H.}{=} 3\cdot\lim \dfrac{\frac{x}{\arctan x}\cdot\left(\frac{x}{1+x^2} - 1\cdot\arctan x\right)/x^2}{2x} =$

(Nenner $x^2\to\infty$) $\qquad\qquad$ Quotientenregel

$= \lim \dfrac{x}{\arctan x}\cdot \lim \dfrac{x-(1+x^2)\arctan x}{2x^3(1+x^2)}\cdot 3 = 3\cdot\lim\dfrac{x}{\arctan x}\cdot\lim\dfrac{x-(1+x^2)\arctan x}{2x^3}$

$\quad$ „$0/0$"

$\underbrace{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1+x^2}}_{=1} \overset{l'H.}{=} 3\cdot 1\cdot\lim\dfrac{1}{\frac{1}{1+x^2}}\cdot\lim\dfrac{1-2x\arctan x-(1+x^2)/(1+x^2)}{6x^2} =$

$= 3\cdot 1\cdot 1\cdot \underbrace{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}}_{=1}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) = -1$

$\Rightarrow \left(\dfrac{\arctan x}{x}\right)^{3/x^2} \xrightarrow{x\to 0} e^{-1} = \dfrac{1}{e}$ $\qquad$ ■

$\boxed{42}$ ⓒ $\left(\dfrac{\sqrt{x}\sin x}{\ln\sqrt{x}}\right)' = \left(\dfrac{x^{1/2}\sin x}{\frac{1}{2}\ln x}\right)' = 2\,\dfrac{\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\sin x + x^{1/2}\cos x\right)\ln x - x^{1/2}\sin x\cdot\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$

$= \dfrac{2x\cos x+\sin x}{\sqrt{x}\,\ln x} - \dfrac{2\sin x}{\sqrt{x}(\ln x)^2}$

stetig überall dort, wo Nenner $\neq 0$, also im ganzen Definitionsbereich $x>1$

(mehr zu vereinfachen geht wohl nicht).

[42] ... (d) $\left(x^{\sin x}(\sin x)^x\right)' = \left(e^{\sin x \ln x + x\ln(\sin x)}\right)' =$ 

$= e^{\cdots}\cdot\left(\cos x\ln x + \frac{\sin x}{x} + \ln(\sin x) + \frac{x}{\sin x}\cos x\right) =$

$= \underbrace{x^{\sin x}(\sin x)^x}_{f(x)}\cdot\left(\cos x\ln x + \frac{\sin x}{x} + \ln(\sin x) + x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}\right)$

stetig: im ganzen Intervall $(0,\pi)$, da dort kein Nenner, keine Basis, kein ln-Argument $\leq 0$ ist

(a) $x>0$: $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}\,e^{-\frac{1}{x}} + x^{3/2}e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2} = e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{x}\right)\sqrt{x}$

$x<0$: $f'(x) = 0$

$x=0$: $f'(0) = \lim_{h\to 0+}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0+}\sqrt{h}\,e^{-\frac{1}{h}} = 0$

$\lim_{h\to 0-}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0-}\frac{0-0}{h} = 0$

$\Rightarrow f'(0) = 0$

$f'$ ist stetig in ganz $\mathbb{R}$, da $e^{-\frac{1}{x}}\frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x\to 0+} 0$ („e ist stärker als jede Potenz")

(e) $x\neq 0$: $f'(x) = 4x^3e^{-\frac{x^2}{4}}\sin\frac{8}{x^3} + x^4\left(\frac{-2x}{4}\right)e^{-\frac{x^2}{4}}\sin\frac{8}{x^3} + x^4e^{-\frac{x^2}{4}}\cos\frac{8}{x^3}\,(-3)\frac{8}{x^4}$

$= e^{-\frac{x^2}{4}}\left(4x^3\sin\frac{8}{x^3} - \frac{1}{2}x^5\sin\frac{8}{x^3} - 24\cos\frac{8}{x^3}\right) \xrightarrow{x\to 0}$ divergent (cos!)

$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} h^3 e^{-\frac{h^2}{4}}\underbrace{\sin\frac{8}{h^3}}_{\text{beschr.}} \xrightarrow{h\to 0} 0$

$f'$ stetig in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, da dort aus stetigen Funktionen $(e, \sin, \frac{1}{x}, \ldots)$ zusammengesetzt

**43** $f(x) := \frac{3^x}{x^3}$ für $x \in (0, \infty)$

$$f'(x) = \left(x^{-3} e^{x \ln 3}\right)' = -3x^{-4} 3^x + x^{-3} \ln 3 \cdot 3^x = \frac{3^x}{x^3}\Big(\underbrace{\ln 3}_{>1} - \frac{3}{x}\Big)$$

$\ln 3 - \frac{3}{x} \le 0 \iff x \le \frac{3}{\ln 3}$ ; $\ln e < \ln 3 < \ln e^2 = 2$ $(e^2 > 2^2)$

~~Also~~ $\Rightarrow$ für $x > 3 > \frac{3}{\ln 3}$ ist $f'(x) > 0$, also $f$ streng wachsend.

Wegen $\pi > 3$ ist also $f(\pi) > f(3) = 1$, also $3^\pi > \pi^3$.

$\blacksquare$

**44** (a) Es sei $\lambda$ zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$, $g(x) := f(x) - \lambda x$

$\Rightarrow g$ ist db in $[a, b]$, $g'(a) = f'(a) - \lambda < 0 < f'(b) - \lambda = g'(b)$

(obdA $f'(a) < \lambda < f'(b)$ E, sonst betrachte $-f$)

$g$ stetig auf dem Kompaktum $[a, b]$, nimmt also sein Infimum an:

$\exists x_0 \in [a, b] : g(x_0) = \min\limits_{x \in [a,b]} g(x)$.

$x_0 = a \Rightarrow \forall h > 0 : 0 \le \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \xrightarrow{h \to 0} g'(a)$, $\lightning$ zu $g'(a) < 0$

ebenso widerlegt man $x_0 = b$

$\Rightarrow x_0 \in (a, b)$, ist also eine Extremstelle im Inneren $\underset{\text{Satz}}{\Rightarrow} g'(x_0) = 0$

$\iff f'(x_0) = \lambda$, $\lambda \in (f'(a), f'(b))$ war bel. $\Rightarrow$ Beh.

$\blacksquare$

Das Entscheidende: Die Ableitung $f'$ darf unstetig sein!

(b) Nein, gibt's nicht. Sonst wäre $f'(0) = 0$, $f'(1) = 1$ und es gäbe ein $x_0 \in (0, 1)$ mit $f'(x_0) = \frac{1}{2}$ ~~existieren~~.