[37.] (i) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Cauchy-Kriterium $\Rightarrow \exists M > 0 : \forall x, y \geq M : |f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$
und $\forall x, y \leq -M : |f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$

f ist stetig auf $[-M, M]$, also gleichm. st. dort (Kompaktum). Also gibt es ein $\delta_1 > 0 : \forall x, y \in [-M, M] : |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$

Setze $\delta := \min\{\delta_1, M\}$.

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ bel. mit $|x - y| < \delta$. Wir zeigen: $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Obda $x < y$.

1. Fall: $x > M \Rightarrow y > M \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ (das haben wir ja oben)

2. Fall $x \in [-M, M]$

   Fall 2.1. $y \in [-M, M] \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ (ebenfalls oben)

   Fall 2.2. $y > M \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(M)| + |f(M) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

3. Fall $x < -M$

   Fall 3.1 $y < -M \leadsto$ wie 1. Fall

   3.2 $y \in [-M, M] \leadsto$ wie 2.1

   3.3. $y > M \Rightarrow |x - y| = y - x > M + M = 2M > M \geq \delta$ ↯

   d.h. Fall 3.3 tritt nicht auf ($|x - y| < \delta \leq M$).

Fazit: stets gilt $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, wenn $|x - y| < \delta(\varepsilon)$,
also ist f glm. stetig auf $\mathbb{R}$.

(ii) Sei $s := \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x)$. Klar: $s \geq f(x_0) \geq \max\{a, b\}$

1. Fall $s = f(x_0) \Rightarrow$ Beh., fertig

2. Fall $s > f(x_0) \Rightarrow s - \max\{a, b\} \geq \varepsilon := s - f(x_0) > 0$

Zu ε gibt es ein $\delta > 0$ mit: $\forall x > \delta : |f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, und
$|f(-x) - b| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \setminus [-\delta, \delta] : \overset{f(x) \leq}{|f(x)|} < \frac{\varepsilon}{2} + \max\{a, b\} \leq \frac{\varepsilon}{2} + f(x_0) = s - \frac{\varepsilon}{2} < s$

$\Rightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \sup_{x \in [-\delta, \delta]} f(x)$. f ist stetig auf dem Kompaktum $[-\delta, \delta]$ ...

... f ist stetig auf $[-\delta,\delta]$ = kompakt $\Rightarrow \exists\, x_1 \in [-\delta,\delta]$:

$$f(x_1) = \max_{x\in[-\delta,\delta]} f(x) = \sup_{x\in[-\delta,\delta]} f(x) = \sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) \Rightarrow f(x_1) = \max_{x\in\mathbb{R}} f(x) \quad \blacksquare$$

$\boxed{38.}$ 1. Fall $f \equiv 0$.

Die f_n sind stetig auf dem Kompaktum $[a,b]$, also existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Maximalstelle x_n von f_n: $\forall\, n\in\mathbb{N}\ \exists\, x_n \in [a,b] : f_n(x_n) = \max_{x\in[a,b]} f_n(x)$

Die Folge (x_n) ist beschränkt und enthält damit nach Bolzano-Weierstraß eine konvergente TF $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert $x_0 \in [a,b]$.

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen $f_{k_n}(x_0) \xrightarrow{n\to\infty} f(x_0) = 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $f_{k_{n_0}}(x_0) = |f_{k_{n_0}}(x_0)| < \varepsilon$.

$f_{k_{n_0}}$ ist stetig und $x_{k_n} \xrightarrow{n\to\infty} x_0$, daher gibt es ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $n_1 \geq n_0$ und $f_{k_{n_0}}(x_{k_n}) < \varepsilon$ für alle $n \geq n_1$.

Für alle $n \geq k_{n_1}$ und alle $x \in [a,b]$ gilt nun:

$$|f_n(x) - f(x)| \underset{f_n \searrow 0}{=} f_n(x) \underset{\text{Wahl } x_n}{\leq} f_n(x_n) \underset{f_n \searrow}{\leq} f_{k_{n_1}}(x_n) \underset{\text{Wahl der } x_n}{\leq} f_{k_{n_1}}(x_{k_{n_1}}) \underset{\substack{f_n \searrow \text{ und} \\ k_{n_1} \geq k_{n_0} \\ (n_1 \geq n_0)}}{\leq}$$

$$\leq f_{k_{n_0}}(x_{k_{n_1}}) \underset{\text{Wahl von } n_1}{<} \varepsilon$$

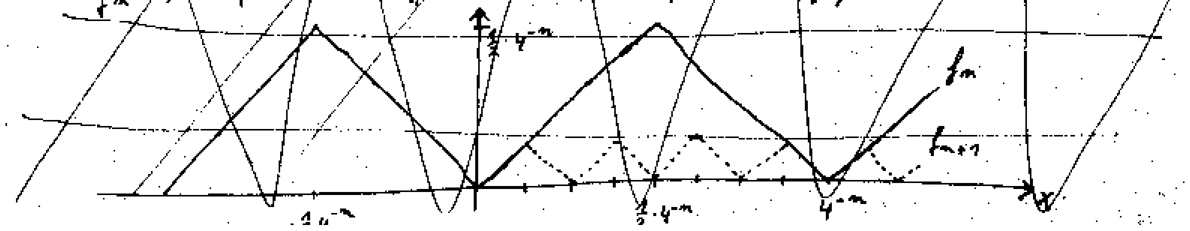
Das ist die Beh. für $f \equiv 0$

2. Fall f beliebig. Obiges auf $f_n - f$ anwenden $\blacksquare$

$\boxed{39.}$ $\varphi(x) = \min\{x - \lfloor x\rfloor, \lfloor x\rfloor + 1 - x\} = d(x,\mathbb{Z})$

$f_n(x) = \min\{x - 4^{-n}\lfloor 4^n x\rfloor, 4^{-n}\lfloor 4^n x\rfloor + 4^{-n} - x\}$ $=: \eta_{k,n}$

$f_n(x) = |x - k\cdot 4^{-n}|, \quad x \in [4^{-n}(k-\tfrac12), 4^{-n}(k+\tfrac12)), \ k\in\mathbb{Z}$



40 ⓐ $f(x) = f(-x) \quad \forall x \iff \forall x \in (-R,R): \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (-x)^k$ 13 10. B

$\iff \forall x \in (-R,R): \sum_{k=0}^{\infty} x^k \left(a_k - (-1)^k a_k\right) = 0$

$\iff \forall k \in \mathbb{N}_0: \; a_k - (-1)^k a_k = 0$ (Identitätssatz)

$\iff \forall n \in \mathbb{N}_0: \; a_{2n+1} + a_{2n+1} = 0$

$\iff \forall n \in \mathbb{N}_0: \; a_{2n+1} = 0$

ⓑ 1. Möglichkeit. Die PR konvergiert ja in $x = 1$, also ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, die a_k bilden also eine Nullfolge und daher gibt es zu $\varepsilon := \frac{1}{2}$ ein k_0 mit $|a_k| < \frac{1}{2} \;\; \forall k \geq k_0$. Da die $a_k \in \mathbb{Z}$ sind, bleibt für diese a_k nur 0 übrig $\Rightarrow$ f ist ein Polynom vom Grad $\leq k_0$

2. Möglichkeit. Ann.: f ist kein Polynom. $\Rightarrow$ es gibt Indizes n_k mit $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ wachsend und $a_{n_k} \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \Rightarrow |a_{n_k}| \geq 1$

$\Rightarrow \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \geq \limsup_{k \to \infty} \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \geq \limsup_{k \to \infty} \sqrt[n_k]{1} = 1$

$\Rightarrow R \leq 1$ ↯

39 (i) $x^x = e^{x \ln x} \Rightarrow (x^x)' = \left(e^{x \ln x}\right)' = e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)' =$

$= x^x \cdot \left(\ln x + \frac{x}{x}\right) = (1 + \ln x)\, x^x$

$\Rightarrow \left(x^{x^x}\right)' = \left(e^{x^x \ln x}\right)' = e^{x^x \ln x} \cdot \left(x^x \ln x\right)' = x^{x^x} \cdot \left((x^x)' \ln x + x^x \cdot \frac{1}{x}\right) =$

$= x^{x^x} \left((1 + \ln x) x^x \cdot \ln x + x^{x-1}\right) = x^{x^x} \cdot x^x \cdot \left(\ln x (1 + \ln x) + \frac{1}{x}\right)$

Dies gilt in ganz $D = (0, \infty)$, da x^{x^x} dort aus db. Funktionen zusammengesetzt ist

(ii) $\left((x^x)^x\right)' = \left(x^{x \cdot x}\right)' = \left(e^{x^2 \ln x}\right)' = e^{x^2 \ln x} \cdot (x^2 \ln x)' = x^{(x^2)} \cdot \left(2x \ln x + \frac{x^2}{x}\right)$

$= x^{1+x^2} \cdot (2 \ln x + 1)$, ebenfalls auf ganz $D = (0, \infty)$

~~Alle f_n sind stetig. Im Innern der Intervalle $I_{k,n}$ ist das klar.~~
~~Sei $x_0 = 4^{-n}(k - \frac{1}{2})$ für ein $(k,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ und sei~~
~~$x_\ell \xrightarrow{\ell \to \infty} x_0-$, also $x_\ell \in I_{k-1,n}$. Sei $j \in \mathbb{N}$ fest.~~
~~1. Fall $j < n$.~~

(III) 1. Fall $x > 0 \Rightarrow e^x > 1 \Rightarrow f(x) = \ln(e^x - 1)$ in einer Umgebung von x

(beachte: $(0,\infty)$ ist offen) $\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{e^x-1} \cdot (e^x - 1)' = \frac{e^x}{e^x-1}$

2. Fall $x < 0 \Rightarrow e^x < 1 \Rightarrow f(x) = \ln(1 - e^x)$

$\Rightarrow$ (wie oben) $f'(x) = \frac{1}{1-e^x}\,(1-e^x)' = \frac{-e^x}{1-e^x} = \frac{e^x}{e^x-1}$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{e^x}{e^x-1} \quad \text{in ganz } D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

(IV) 1. Fall $x > 0 \Rightarrow f(x) = x^3$ in Umgebung von $x \Rightarrow f'(x) = 3x^2$ dort

2. Fall $x < 0 \Rightarrow f(x) = (-x)^3 = -x^3$ in Umg. von $x \Rightarrow f'(x) = -3x^2$ dort

3. Fall $x = 0 \Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|^3 - 0^3}{h} = 0$

denn $\left| \frac{|h|^3 - 0^3}{h} - 0 \right| = \frac{|h|^3}{|h|} = h^2 \xrightarrow{h \to 0} 0$

$\left(< \varepsilon \text{ für } |h - 0| < \delta(\varepsilon) := \sqrt{\varepsilon} \right)$

Fazit: $$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -3x^2 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

$\boxed{Z}$ / $d(x, D) := \inf\{|x-y| : y \in D\}$ hängt stetig von x ab: (10.B Z (1)

10.B.

ichhaber (1)

$|x-y| \le |x-\tilde{x}| + |\tilde{x}-y| \Rightarrow \inf\limits_{y\in D} |x-y| \le |x-\tilde{x}| + \inf\limits_{y\in D} |\tilde{x}-y|$

$\Rightarrow d(x,D) - d(\tilde{x},D) \le |x-\tilde{x}| \underset{x,\tilde{x} \text{ vertauschen}}{\Rightarrow} |d(x,D) - d(\tilde{x},D)| \le |x-\tilde{x}|$

$\Rightarrow$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante ≤ 1

$0 \le \varphi(x) := d(x,\mathbb{Z}) = \min\{x - \lfloor x \rfloor ; \lfloor x \rfloor + 1 - x\} \le \frac{1}{2}$

φ ist periodisch mit Periode 1: $\varphi(x+1) = \varphi(x)$. Das folgt aus $\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$

Beweis dafür: $\lfloor x \rfloor \le x < \lfloor x \rfloor + 1 \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor + 1 \le x+1 < \lfloor x \rfloor + 2 \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor + 1$ ist eine ganze Zahl $\le x+1$, also $\lfloor x \rfloor + 1 \le \lfloor x+1 \rfloor$, und $\lfloor x \rfloor + 2$ ist eine ganze Zahl $> x+1$, also $\lfloor x \rfloor + 2 \ge \lfloor x+1 \rfloor + 1 \Rightarrow \lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$ ⊛

Beweis für die min-Darstellung:

1. Fall $\lfloor x \rfloor \le x \le \lfloor x \rfloor + \frac{1}{2} \Rightarrow \forall k \in \mathbb{Z}, k \le \lfloor x \rfloor : |x-k| = x-k \ge$

$\ge x - \lfloor x \rfloor = |x - \lfloor x \rfloor|$

$\forall k \in \mathbb{Z}, k > \lfloor x \rfloor : |x-k| = k - x \ge \lfloor x \rfloor + 1 - x \ge \frac{1}{2} \ge x - \lfloor x \rfloor$

Also: $\forall k \in \mathbb{Z}: x - \lfloor x \rfloor \le |x-k| \Rightarrow x - \lfloor x \rfloor = \min\limits_{k\in\mathbb{Z}} |x-k|$

2. Fall $\lfloor x \rfloor + \frac{1}{2} < x < \lfloor x \rfloor + 1$

$\Rightarrow \lfloor x \rfloor + 1 - x < \frac{1}{2} < x - \lfloor x \rfloor \le |x-k| \quad \forall k \in \mathbb{Z}$ (analog dem 1. Fall)

Also: $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante $L_\varphi \le 1$, $L_\varphi = 1$ wegen

$|\varphi(\frac{1}{2}) - \varphi(0)| = \frac{1}{2} - 0 = 1 \cdot |\frac{1}{2} - 0|$.

$f_n(x) := q^n \varphi(a^n x)$, $a \in \mathbb{N}$, $a \ge 4$, $\frac{2}{a} < q < 1$ (a, q fest)

Jedes f_n ist lipschitzstetig mit $L_{f_n} = q^n a^n$:

$|f_n(x) - f_n(y)| = q^n |\varphi(a^n x) - \varphi(a^n y)| \le q^n a^n |x-y|$.

f_n hat Periode a^{-n}: $f_n(x + a^{-n}) = q^n \varphi(a^n x + 1) = q^n \varphi(a^n x) = f_n(x)$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: f_n(x+1) = f_n(x)$, weil 1 ein ganzes Vielfaches von a^{-n} ist ($a \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x+1) = f(x+1)$, f hat Periode 1 (falls f existiert).

10.B $\boxed{Z}$ ... f existiert und ist stetig, da die Reihe gleichmäßig konvergiert: 10.B.Z ②

Lichtblau ② $|f_n(x)| = q^n\,|\varphi(a^n x)| \le q^n \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{2(1-q)}$ ist konv. Majo.

Um zu zeigen, daß f in keinem Punkt differenzierbar ist, untersuchen wir den Differenzenquotienten $(\delta_k f)(x) := \dfrac{f(x+h_k)-f(x)}{h_k}$ mit $h_k = \pm a^{-k-1}$, $k \in \mathbb{N}$ (das Vorzeichen legen wir später fest).

Sei $k < n$. Dann ist h_k ein Vielfaches von a^{-n}: $|h_k| = a^{-k-1} = a^{-n}\,a^{\overbrace{n-k-1}^{\ge 0}}$

$$\Rightarrow (\delta_k f_n)(x) = 0 \quad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow (\delta_k f)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\delta_k f_n)(x) = \sum_{n=1}^{k-1} (\delta_k f_n)(x) + (\delta_k f_k)(x)$$

$$\Rightarrow |(\delta_k f)(x)| \ge |(\delta_k f_k)(x)| - \sum_{n=1}^{k-1} |(\delta_k f_n)(x)|$$

Für $k \ge n$ gilt $|(\delta_k f_n)(x)| = \dfrac{|f_n(x+h_k)-f_n(x)|}{|h_k|} \le \dfrac{q^n a^n}{|h_k|}\,|h_k| = q^n a^n$

Abhängig von der beliebigen, aber festen Zahl x wählen wir das VZ der h_k so, daß f_k zwischen x und $x+h_k$ affin ist (daß dies geht, zeigen wir gleich).

Dann ist $(\delta_k f_k)(x) = \pm q^k a^k$ und es folgt

$$|(\delta_k f)(x)| \ge q^k a^k - \sum_{n=1}^{k-1} q^n a^n = q^k a^k - \frac{qa - q^k a^k}{1-qa} = q^k a^k - \frac{q^k a^k - qa}{qa-1} >$$

$$> q^k a^k - \frac{q^k a^k}{qa-1} = q^k a^k \cdot \eta \quad \text{mit } 0 < \eta := 1 - \frac{1}{qa-1} < 1 \quad (qa > 2)$$

Also $|(\delta_k f)(x)| \xrightarrow{k\to\infty} \infty$, somit ist f an der Stelle x nicht db.

---

f_k ist stückweise affin: φ ist affin in Intervallen der Form $[j, j+\frac{1}{2})$ und $[j+\frac{1}{2}, j+1)$, $j \in \mathbb{Z}$.
f_k ist es daher in Intervallen der Form $[a^{-k}j, a^{-k}j + a^{-k}\cdot\frac{1}{2})$ bzw. $[a^{-k}(j+\frac{1}{2}), a^{-k}(j+1))$ (denn dann ist $a^k \cdot x \in [j, j+\frac{1}{2})$ bzw $[j+\frac{1}{2}, j+1)$). Jedes $x \in \mathbb{R}$ liegt in einem derartigen Intervall und daher bei passender Wahl des VZ $x+h_k$ in demselben Intervall, denn x hat zu einem der Intervall-Endpunkte einen Abstand $\ge \frac{1}{2}a^{-k}\cdot\frac{1}{2} \ge \frac{1}{a}\cdot a^{-k} = |h_k|$.