$\cancel{28}$ $\boxed{33}$ bekannt: $\frac{e^x-1}{x} \xrightarrow{x\to 0} 1$, $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x\to 0} 1$, $\frac{e^x}{x^m} \xrightarrow{x\to\infty} \infty$ $(m \in \mathbb{N})$

(a) (i) Setze $y := \ln x$. Dann ist $\frac{(\ln x)^a}{x} = \frac{y^a}{e^y}$. Sei $m \in \mathbb{N}$, $m > a$. Dann gilt für $y > 1$: $0 \le \frac{y^a}{e^y} \le \frac{y^m}{e^y} = \frac{1}{e^y/y^m} \xrightarrow{y\to\infty} 0$. Somit, da für $x \to \infty$ auch $\ln x \to \infty$: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^a}{x} = \lim\limits_{y\to\infty} \frac{y^a}{e^y} = 0$

(ii) $y := -\ln x^a \Rightarrow y \to \infty$ für $x \to 0+$ (bek.: $\ln x \xrightarrow{x\to 0+} -\infty$)

$\Rightarrow x^a \ln x = e^{-y} \cdot \left(-\frac{y}{a}\right) = -\frac{1}{a} \frac{y}{e^y} \xrightarrow{y\to\infty} 0$.

also $\lim\limits_{x\to 0+} x^a \ln x = 0$

* Zähler (pos.) Potenz ist stärker als ... $\sqrt[3]{x}$ + $\sqrt{x}$ + → 0/∞ =

(iii) $y := x \ln a = \ln(a^x) \xrightarrow{x\to 0} 0$

$\Rightarrow \frac{a^x-1}{x} = \frac{e^{x\ln a}-1}{x} = \frac{e^y-1}{y} \ln a \xrightarrow{y\to 0} 1 \cdot \ln a$

also $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$

(iv) $y := \ln(x+1) \xrightarrow{x\to 0} 0$; $\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{y}{e^y-1} \xrightarrow{y\to 0} 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

(v) $\frac{e^x-1}{\sin x} = \frac{e^x-1}{x} \cdot \frac{x}{\sin x} \xrightarrow{x\to 0} 1 \cdot \frac{1}{1} = 1$

(vi) $\cos x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \Rightarrow 1 - \cos x = 1 - 1 - \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$

$\Rightarrow \frac{1-\cos x}{x^2} = -\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2(k-1)} = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+2)!} x^{2j} = \frac{1}{2} - \frac{1}{24}x^2 + - \ldots$

$\xrightarrow{x\to 0} \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$ (Satz: $\lim\limits_{x\to x_0} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \left(\lim\limits_{x\to x_0} x\right)^n$)

(b) $x_0 = a$, $x_1 = \sqrt{a}$, $x_2 = a^{1/4}$ — Induktion: $x_n = a^{2^{-n}}$ (Beweis: $n = 0, 1$ ✓, $x_{n+1} = \sqrt{x_n} = x_n^{2^{-1}} \underset{\text{IB}}{=} (a^{2^{-n}})^{2^{-1}} = a^{2^{-n} \cdot 2^{-1}} = a^{2^{-(n+1)}}$ ∎)

9B/2

$x^n = a^{2^{-n}} = a^{1/2^n} = \sqrt[2^n]{a} \Rightarrow y_n = \dfrac{a^{2^{-n}}-1}{2^{-n}}$ für $n \in \mathbb{N}$

$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^{1/2^n}-1}{1/2^n} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{a^h - 1}{h} \underset{(a)(iii)}{=} \ln a$

$\boxed{36.}$ $\boxed{34}$ (a) (i) $|f_n(x)| = \dfrac{4x^2}{1+n^2x^2} = \dfrac{1}{\frac{1}{x^2}+n^2} \leq \dfrac{1}{n^2}$ für $x \neq 0$,

(b)(ii) ist länger, daher 1 Punkt; sonst $\frac{1}{2}$ Punkt

$|f_n(0)| = 0 \leq \frac{1}{n^2}$ erst recht $\Rightarrow f_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ gleichmäßig, da $\frac{1}{n^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (Unabhängig von x. Allg. $|f_n(x) - f(x)| < a_n \to 0 \Rightarrow$ glm. K. wegen $|f_n(x) - f(x)| < a_n < \varepsilon$ für $n > n_0(\varepsilon)$ unabh. v. x)

(ii) $f_n(0) = 0$, für $x \in (0,1]$: $f_n(x) = \dfrac{n^2 x}{1+n^2x^2} = \dfrac{x}{\frac{1}{n^2}+x^2} \xrightarrow{n\to\infty} \dfrac{x}{x^2} = \dfrac{1}{x}$

also $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ \frac{1}{x} & \text{für } x \in (0,1] \end{cases}$ punktweise

Die Grenzfunktion f ist unstetig, aber alle f_n sind es $\Rightarrow$ Konvergenz kann nicht glm. sein

~~(iii) $f_n(x) = \sqrt[n]{n^2}\,\sqrt[n]{x} \xrightarrow{n\to\infty} 1$ für $x \in (0,1]$~~
~~$f_n(0) = 0 \xrightarrow{n\to\infty} 0$~~
~~$\Rightarrow f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x) := \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x \in (0,1] \end{cases}$ punktweise, aber wieder nicht glm.~~

(b) (i) $\left|\dfrac{nx^2}{n^3+x^3}\right| \underset{x\in[0,1]}{=} \dfrac{nx^2}{n^3+x^3} \leq \dfrac{n}{n^3+x^3} \leq \dfrac{n}{n^3} = \dfrac{1}{n^2} \Rightarrow$ glm. Konv., da $\sum\limits_1^\infty \frac{1}{n^2}$ konv. Majo.

(ii) $\left|\dfrac{-1}{1+x^2}\right| < 1$ für alle $x \neq 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{-1}{1+x^2}\right)^n = \dfrac{1}{1+\frac{1}{1+x^2}} = \dfrac{1+x^2}{2+x^2}$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^2}{(1+x^2)^n}$ konvergiert punktweise gegen $x^2 \dfrac{1+x^2}{2+x^2}$ (auch $x=0$, da ~~was~~ klar) auf ganz $\mathbb{R}$

Sogar gleichmäßig: $\left|\sum\limits_{n=0}^{m} x^2\left(\dfrac{-1}{1+x^2}\right)^n - x^2\dfrac{1+x^2}{2+x^2}\right| = \left|\sum\limits_{n=m+1}^{\infty} x^2\left(\dfrac{-1}{1+x^2}\right)^n\right| = \left|\left(-\dfrac{1}{1+x^2}\right)^{m+1}\right| \left|\sum\limits_0^\infty \cdots\right|$

$= \dfrac{1}{(1+x^2)^{m+1}} x^2 \left|\dfrac{1+x^2}{2+x^2}\right| = \dfrac{x^2}{(1+x^2)^m} \dfrac{1}{2+x^2} \leq \dfrac{x^2}{(1+x^2)^m} \leq \dfrac{x^2}{1+mx^2} = \dfrac{1}{\frac{1}{x^2}+m} \leq \dfrac{1}{m}$

Für $x = 0$ gilt erst recht $0 = \left|\sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(0)\right| < \frac{1}{m}$

$\Rightarrow$ glm. Konv. der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ auf $\mathbb{R}$ ($\frac{1}{m} < \varepsilon$ unabhängig von x)

(iii) Wie oben folgt punktweise Konvergenz gegen $x^2 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{1+x^2}} = 1+x^2$ für $x \neq 0$,

für $x = 0$ gilt $\sum f_n(0) = \sum 0 = 0$.

Die Grenzfunktion $f(x) := \begin{cases} 0, & x=0 \\ 1+x^2, & x \neq 0 \end{cases}$ ist unstetig im Gegensatz zu den $f_n(x)$

$\Rightarrow$ Konvergenz nicht gleichmäßig.

(iv) $x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow e^{-n(x^2+x+1)} \leq e^{-\frac{3}{4}n} = \left(e^{-\frac{3}{4}}\right)^n \quad \forall x \in \mathbb{R} \ \forall n \in \mathbb{N}$.

$e^{-\frac{3}{4}} < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-\frac{3}{4}}\right)^n$ konvergiert $\Rightarrow$ glm. Konv. der Reihe.

(v) $\frac{1-(x^2+1)e^{-nx^2}}{(x^2+1)(n^2+1)} = \frac{\frac{1}{x^2+1} - e^{-nx^2}}{n^2+1}$; $\frac{1}{x^2+1} \leq 1$, $e^{-nx^2} \leq 1 \ \forall n \in \mathbb{N}_0$

$\Rightarrow \left| - \text{"} - \right| \leq \frac{2}{n^2+1}$; $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n^2+1}$ ist konv. Major. $\Rightarrow$ glm. Konv. auf $\mathbb{R}$

$\boxed{35}$ Setze $g(x) := f(x) - x \Rightarrow g(a) = f(a) - a \geq 0$, $g(b) = f(b) - b \leq 0$

weil $f([a,b]) \subseteq [a,b]$. ZWS $\Rightarrow$ in $[a,b]$ gibt es eine Stelle x mit $g(x) = 0$

$\Leftrightarrow f(x) = x$

■

Punkte: $\boxed{34}$ (b)(ii) 1 Punkt, Rest $\frac{1}{2}$

$\boxed{36}$ 4 Punkte

36. $f_n \to f$ glm $\Leftrightarrow$ $f_n(x_n) - f(x_n) \to 0 \quad \forall (x_n) \subseteq D$ 9.B

Beweis „$\Rightarrow$" Die Vor. lautet $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall x \in D \; \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Dies gilt insbesondere für die spezielle Wahl $x = x_n$

„$\Leftarrow$" Daß $f_n \to f$ punktweise konvergiert, folgt, wenn wir die spezielle Folge $x_n = x \; \forall n$ wählen.

Ann.: Die Konvergenz ist nicht gleichmäßig, dann gilt:

$$\exists \varepsilon > 0 \; \forall n \in \mathbb{N} \; \exists k_n \geq n \; \exists x_n \in D : |f_{k_n}(x_n) - f(x_n)| > \varepsilon$$

Konstruktion einer Folge (y_k), die der Voraussetzung widerspricht ($\Rightarrow$ Konv. doch glm.):

Setze $y_j = x_1$ für $j = 1, \dots, k_1$

$y_j = x_2$ für $j = k_1 + 1, \dots, k_2$

$\vdots$

$y_j = x_\ell$ für $j = k_{\ell-1} + 1, \dots, k_\ell$ (Daß das geht, da steckt ~~[illegible]~~ das Auswahlaxiom dahinter ...)

$\Rightarrow$ wir haben $|f_{k_n}(y_{k_n}) - f(y_{k_n})| \underbrace{> \varepsilon}_{\forall n \in \mathbb{N}}$, daher kann $|f_n(y_n) - f(y_n)| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ nicht gelten, was aber unsere Voraussetzung ist. $\blacksquare$