29 a) $\lim\limits_{x\to 0} \dots = \lim\limits_{x\to 0+} \left(\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}-\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}}}\right) = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}-\sqrt{1-\sqrt{x}}\right)$

$= \lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{(1+\sqrt{x})-(1-\sqrt{x})}{\sqrt{1+\sqrt{x}}+\sqrt{1+\sqrt{x}}} = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{x}}+\sqrt{1+\sqrt{x}}} = \frac{2}{2} = 1$

b) $\frac{(x+1)^{3/2}-x^{3/2}}{x^{1/2}} = \frac{(x+1)^3-x^3}{\sqrt{x}\left((x+1)^{3/2}+x^{3/2}\right)} = \frac{3x^2+3x+1}{\sqrt{x}\left((x+1)^{3/2}+x^{3/2}\right)} = \frac{3+3/x+1/x}{(1+\frac{1}{x})^{3/2}+1}$

$\xrightarrow{x\to\infty} \frac{3+0+0}{(1+0)^{3/2}+1} = \frac{3}{2}$

c) $\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{a}\right) = \frac{a-(x+a)}{xa(x+a)} = \frac{-1}{a(x+a)} \xrightarrow{x\to 0} -\frac{1}{a^2}$

d) $\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x} = \frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\frac{2x}{\sin x}\cdot e^{-x} \xrightarrow{x\to 0} 1\cdot 2\cdot e^{-0} = 2$

e) $\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}{x-2} = \frac{x+2-(3x-2)}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}\right)} = \frac{-2(x-2)}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}\right)} \xrightarrow{x\to 2} \frac{-2}{2+2} = -\frac{1}{2}$

f) $(1-\cos x)\frac{\cos x^2}{\sin x^2} = \frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{x^2}{\sin x^2}\cdot\cos x^2 \xrightarrow{x\to 0} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}\cdot 1 = \frac{1}{2}$

$\frac{\cos x-1}{x^2} = \frac{\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots\right)-1}{x^2} = -\frac{1}{2!}+\frac{x^2}{4!}-\dots \xrightarrow{x\to 0} -\frac{1}{2}$

g) $\frac{e^{-x^2}+x\sin x-1}{\cos x+ax^2-1} = \frac{\left(1+\frac{-x^2}{1!}+\frac{(-x^2)^2}{2!}+\dots\right)+x\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-+\dots\right)-1}{\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-+\dots\right)+ax^2-1} =$

$= \frac{-\frac{x^4}{6}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^4}{2}+x^6(\dots)}{x^2(a-\frac{1}{2})+\frac{x^4}{4!}+x^6(\dots)} = \frac{\frac{2}{6}x^4+x^5(\dots)}{\dots}$

$= \begin{cases} \frac{\frac{1}{3}x^2+x^3(\dots)}{(a-\frac{1}{2})+x^2(\dots)} \xrightarrow{x\to 0} 0 & \text{für } a\neq\frac{1}{2} \\ \frac{\frac{1}{3}+x\cdot(\dots)}{\frac{1}{24}+x^2(\dots)} \xrightarrow{x\to 0} \frac{1/3}{1/24} = 8 & \text{für } a=\frac{1}{2} \end{cases}$

[30] ⓐ CGS war in Tutorium dran. So ähnlich geht. Sei $A := \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ $(< \infty$ n.V.$)$.

1. Fall $A = 0 \Rightarrow$ alles banal.

2. Fall $A > 0$. $b_k \to 0$ $(k \to \infty)$ $\Rightarrow$ ~~...~~ $\forall \varepsilon > 0\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall k > m: |b_k| < \frac{\varepsilon}{2A}$.

Sei $\gamma := \sum_{k=0}^{m} |b_k|$.

Fall 2.1 $\gamma > 0$. Wähle $l \in \mathbb{N}$ so, daß $\sum_{k=l}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2\gamma}$ (geht, da Reihenreste $\to 0$,

$$\forall n > n_0 := m + l: |a_n b_0 + \dots + a_0 b_n| \leq \left(|a_n b_0| + \dots + |a_{n-m} b_m|\right) +$$

$$+ \left(|a_{n-m-1} b_{m+1}| + \dots + |a_0 b_n|\right) \leq \left(|a_n| + \dots + |a_{n-m}|\right)\gamma +$$

$$+ \left(|a_{n-m-1}| + \dots + |a_0|\right) \cdot \frac{\varepsilon}{2A} \leq \underbrace{\frac{\varepsilon}{2\gamma}}_{\text{Absch. durch Reihenrest}} \cdot \gamma + \underbrace{A}_{\text{ganze Reihe}} \cdot \frac{\varepsilon}{2A} = \varepsilon$$

Fazit: $|a_n b_0 + \dots + a_0 b_n| = \left|\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right| < \varepsilon$ für $n > n_0(\varepsilon)$

Fall 2.2. $\gamma = 0$: der erste Summand oben fällt weg $\rightsquigarrow < \frac{\varepsilon}{2}$

[4]

ⓑ $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a$ (abs. Konv.), $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = b$, Teilsummen A_n, B_n.

CP: $c_k := \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$, $C_n := \sum_{k=0}^{n} c_k = a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)$

$+ \dots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0) = a_0(b_0 + \dots + b_n) + a_1(b_0 + \dots + b_{n-1})$

$+ \dots + a_n \cdot b_0 = a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \dots + a_n B_0 = a_0(B_n - b) + a_1(B_{n-1} - b) +$

$+ \dots + a_n(B_0 - b) + (a_0 + \dots + a_n) b = A_n b + \sum_{k=0}^{n} a_k (B_{n-k} - b)$

$A_n b \xrightarrow{n\to\infty} ab$, $(B_n - b) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (Reihenreste!) $\Rightarrow C \xrightarrow{n\to\infty} ab + 0$.

$\boxed{31}$ (a) $\exists\, C>0\ \forall x\in\mathbb{R}: |g(x)|\le C$. $f(0)=0$. 8.BC

f stetig in 0, also $|f(x)| = |f(x)-f(0)| < \varepsilon$ für $|x|<\delta(\varepsilon)$ ($\varepsilon>0$ bel.)

$\Rightarrow |(fg)(x)-(fg)(0)| = |f(x)\,g(x)| \le |f(x)|\cdot C < \varepsilon\cdot C$ für $|x|<\delta(\varepsilon)$

also $f\cdot g$ stetig in 0.

Oder: $0\ne x_n\to 0 \Rightarrow f(x_n)\to 0\ (n\to\infty)$

$\Rightarrow 0\le |(fg)(x_n)| \le C\cdot|f(x_n)| \to 0\ (n\to\infty)$

(b) $0\ne x_n\to 0 \Rightarrow f(x_n)\xrightarrow{n\to\infty} f(0)=1$

Sei $x\in\mathbb{R}$ bel., $x\ne x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$, $y_n := x_n - x \to 0$

$$f(x_n) = f(x+y_n) \le f(x)\,f(y_n)$$
$$f(x) = f(x_n-y_n) \le f(x_n)\cdot f(-y_n)$$

$f(-y_n)\xrightarrow{n\to\infty} 1 \Rightarrow$ ab einer Stelle n_0 sind alle $f(-y_n)\ge\frac{1}{2}>0$

$\Rightarrow \forall n\ge n_0:\ \underbrace{f(x)\frac{1}{f(-y_n)}}_{\to f(x)\cdot 1} \le f(x_n) \le \underbrace{f(x)\cdot f(y_n)}_{\to f(x)\cdot 1}$

$\Rightarrow f(x_n)\xrightarrow{n\to\infty} f(x)$, also f stetig an der Stelle x (die Folge (x_n) war bel.

$x\in\mathbb{R}$ bel $\Rightarrow f$ stetig in $\mathbb{R}$. ∎

$\boxed{32.}$ (a) $x^2+x-2 = (x+2)(x-1)$

8. B $\lfloor 4$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & x \neq 1,-2 \\ -3 & x = 1 \\ -1/3 & x=-2 \end{cases}$$

$\cancel{\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1} = \infty}$

$\cancel{(z.B.\ x_n = 1+\frac{1}{n} \to 1,\ f(x_n) = \frac{1}{1+\frac{1}{n}-1} \to \infty}$

f unstetig in 1: $x_n := 1+\frac{1}{n} \to 1$, $f(x_n) = \frac{1}{1+\frac{1}{n}-1} = n \to \infty \neq f(1)$

f stetig in -2, da $\frac{1}{x-1} \xrightarrow{x\to -2} \frac{1}{-2-1} = -\frac{1}{3} = f(-2)$

(genauer: $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{-2-1} = \frac{-2-1-(x-1)}{(x-1)(-2-1)} = \frac{+2+x}{(x-1)\cdot 3} \xrightarrow{x\to -2} \frac{2-2}{(-2-1)\cdot 3} = ($

(b) 1. Fall $x \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$.

$x_n := x + \frac{\sqrt{2}}{n} \notin \mathbb{Q}$, $f(x_n) = 0 \xrightarrow{n\to\infty} 0 \neq x = f(x)$, obwohl $x_n \to x$

$\Rightarrow f$ nicht stetig in $\mathbb{Q}\setminus\{0\}$

2. Fall $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Es gibt eine Folge rationaler Zahlen mit $x_n \to x$ $(n\to\infty)$ (z.B. g-adische Entwicklung einfach abbrechen). $f(x_n) = x_n \xrightarrow{n\to\infty} x \neq 0 = f(x)$

$\Rightarrow f$ nicht stetig in $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

3. Fall $x=0$. Es gilt $|f(x)| \leq |x|$ ~~...~~ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aus $x_n \to 0$ folgt also sofort $f(x_n) \to 0$ $(n\to\infty)$ (Sandwich).

Fazit: f ist genau in $x=0$ stetig.

(c) 1. Fall $x \notin \mathbb{Z}$. Sei (x_n) bel. Folge mit $x_n \to x$. Dann gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$: $|x_n - x| < x - \lfloor x \rfloor$ für $n \geq n_0$ $(\varepsilon = x - \lfloor x \rfloor > 0)$. Also $\forall n \geq n_0$: $x_n > \lfloor x \rfloor$. Wegen $1+\lfloor x \rfloor - x > 0$ gibt es auch ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $\forall n \geq n_1$: $|x_n - x_0| <$ ~~...~~ $1+\lfloor x \rfloor - x$. Also gilt für $n \geq n_1$: $x_n < \lfloor x \rfloor + 1$. Insgesamt: ~~...~~ $\forall n \geq \max\{n_0, n_1\}$: $\lfloor x \rfloor < x_n < \lfloor x$ und daher $\lfloor x_n \rfloor = \lfloor x \rfloor$. Also gilt für $n \geq \max\{n_0, n_1\}$

$|f(x_n) - f(x)| = |\lfloor x_n \rfloor + \sqrt{x_n - \lfloor x_n \rfloor} - (\lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor})| = |\sqrt{x_n - \lfloor x \rfloor} - \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

B2 (c) .... Somit ist f stetig in $x \notin \mathbb{Z}$ P.B 5

2. Fall $x \in \mathbb{Z}$. Sei (x_n) Folge mit $x_n > x$, $x_n \to x$. Wie im 1. Fall gilt $\lfloor x_n \rfloor = \lfloor x \rfloor$ für alle hinreichend großen n ($\lfloor x \rfloor = x < x_n < x + \frac{1}{2} < \lfloor x \rfloor + 1$) und damit

$$f(x_n) = \lfloor x_n \rfloor + \sqrt{x_n - \lfloor x_n \rfloor} = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x_n - \lfloor x \rfloor} \xrightarrow{n \to \infty} \lfloor x \rfloor + \underbrace{\sqrt{x - \lfloor x \rfloor}}_{=0} = f(x) = x$$

Sei (x_n) nun eine Folge mit $x_n \to x$ und $x_n < x$. Ab einer Stelle n_0 gilt dann

$$\lfloor x_n \rfloor = \lfloor x \rfloor - 1 = x - 1 \text{ und damit } f(x_n) = \lfloor x_n \rfloor + \sqrt{x_n - \lfloor x_n \rfloor} = x - 1 + \sqrt{x_n - x + 1}$$

$$\xrightarrow{n \to \infty} x - 1 + \sqrt{x - x + 1} = x = \underbrace{\lfloor x \rfloor}_{=x} + \underbrace{\sqrt{x - \lfloor x \rfloor}}_{=0} = f(x)$$

Also ist f auch stetig in $x \in \mathbb{Z}$.

Fazit: f ist stetig in ganz $\mathbb{R}$.

Genauer: Sei (x_n) bel. mit $x \neq x_n \to x$. ~~Fall 2.1. ∃ Teilfolge~~

Fall 2.1: Nur endlich viele $x_n < x$ $\Rightarrow$ s.o. (fast alle $x_n > x$)

2.2: $x_n > x$ $\Rightarrow$ s.o.

2.3: jew. ∞ viele $\rightsquigarrow$ 2 TF, für beide gilt (s.o.) $f(x_{n_k}) \xrightarrow{k \to \infty} f(x)$, somit auch für die Gesamtfolge (Folgenmischung: $H(a_n) = \{\lim a_{n_k}, \lim a_{n_k}\} = \{\lim a_n\}$).

(d) Nenner: $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3) = 0 \iff x \in \{1,3\} \Rightarrow f$ stetig in $\mathbb{R} \setminus \{1,3\}$

Zähler: $(x^4 - 10x^2 + 9) : (x^2 - 4x + 3) = x^2 + 4x + 3$ (weil Zähler $= 0$ in $1, 3$)

$$\begin{array}{l} -(x^4 - 4x^3 + 3x^2) \\ \hline 4x^3 - 13x^2 \\ -(4x^3 - 16x^2 + 12x) \\ \hline 3x^2 - 12x + 9 \\ 3x^2 - 12x + 9 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 3 & , x \neq 1, 3 \\ a & , x = 1 \\ b & , x = 3 \end{cases}$$

$\Rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = 8, \quad \lim_{x \to 3} f(x) = 24$

$\Rightarrow$ (f stetig in $x = 1 \iff a = 8$; f stetig in $x = 3 \iff b = 24$)