K $\boxed{21}$ (a) Minoranten-Kriterium.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \underset{n\ge 2}{=} 1+1+\sum_{\nu=2}^{n}\frac{n(n-1)\dots(n-\nu+1)}{\nu!}\cdot\frac{1}{n^\nu}\cdot 1^{n-\nu}, \quad e > \sum_{\nu=0}^{k}\frac{1}{\nu!}$$

$$\Rightarrow e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \underset{n\ge 2}{>} \sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{\nu!} - 2 - \sum_{\nu=2}^{n}\frac{1}{\nu!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{\nu-1}{n}\right) = \sum_{\nu=2}^{n}\frac{1}{\nu!}\Big[1-\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{\nu-1}{n}\right)}_{\le\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot 1\cdot\dots\cdot 1}\Big]$$

$$\ge \sum_{\nu=2}^{n}\frac{1}{\nu!}\left(1-1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{\nu=2}^{n}\frac{1}{\nu!} > \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2} \quad\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n} \text{ ist div. Minor.}$$

(b) Majoranten-Krit. (Major)

$$0<e-\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!} = \sum_{j=k+1}^{\infty}\frac{1}{j!} = \frac{1}{(k+1)!}\left(1+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{(k+2)(k+3)}+\dots\right) < \frac{1}{(k+1)!}\left(1+\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)^2}+\dots\right)$$

$$= \frac{1}{(k+1)!}\,\frac{1}{1-\frac{1}{k+1}} = \frac{1}{(k+1)!}\,\frac{k+1}{k} = \frac{1}{k\cdot k!} < \frac{1}{k!} \quad\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} \text{ ist konv. Major.}$$

(c) $$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\binom{4n}{3n}}{\binom{4n+4}{3n+3}} = \frac{(4n)!\,(3n+3)!\,(4n+4-3n-3)!}{(4n+4)!\,(4n-3n)!\,(3n)!} = \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(4n+4)\dots(4n+1)}\,\frac{(n+1)!}{n!} =$$

$$= \frac{3}{4}\,\frac{\left(3+\frac{3}{n}\right)\left(3+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\left(4+\frac{2}{n}\right)\left(4+\frac{3}{n}\right)\left(4+\frac{1}{n}\right)} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{3^3}{4^4} = \frac{27}{256} < 1 \quad\Rightarrow \text{abs. Konv. nach QK}$$

(d) $$\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \Rightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}}\sqrt[n]{n}\ \left(=\sup\{\sqrt[n]{n} : n\in\mathbb{N}\}\right) =: c < \infty$$

$$\frac{\sqrt[n]{n}}{n!} \le \frac{c}{n(n-1)}, \quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)} \text{ ist konv. Major} \Rightarrow \text{abs. Konv.}$$

oder WK: $0<\sqrt[n]{\frac{\sqrt[n]{n}}{n!}} < \frac{\sqrt[n]{c}}{\sqrt[n]{n!}} \longrightarrow \text{„}\frac{1}{\infty}\text{"} = 0 < 1$

(e) $\sqrt[n]{|a_n|} = \alpha+\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} \alpha \Rightarrow$ abs. Konv. nach WK für $0\le\alpha<1$, Div. für $\alpha>1$.

Fall $\alpha=1$: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e \ne 0 \Rightarrow$ Reihe divergent

(f) $$\frac{n^4+3n+\frac{1}{n}}{(n^3+1)(2n+3)} = \frac{1+\frac{3}{n^3}+\frac{1}{n^5}}{\left(1+\frac{1}{n^3}\right)\left(2+\frac{3}{n}\right)} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2} \ne 0 \Rightarrow \text{Divergenz.}$$

K $\boxed{23}$ (a) $$\frac{1}{k^2-p^2} = \left(\frac{1}{k-p}-\frac{1}{k+p}\right)\frac{1}{2p} \Rightarrow \sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{1}{k^2-p^2} = \frac{1}{2p}\sum_{\ell=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\ell}-\frac{1}{\ell+2p}\right) = \frac{1}{2p}\sum_{\ell=1}^{2p}\frac{1}{\ell}$$

Teleskop-Reihe.

$\boxed{23}$ (1) (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+1}{(2k-1)\cdots(2k+2)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1/4}{(k-\frac{1}{2})k(k+\frac{1}{2})(k+1)} \cdot \frac{1}{4^2} =$

$= \frac{1}{4} \sum \left(\frac{1/2}{(k-\frac{1}{2})k} - \frac{1/2}{(k+\frac{1}{2})(k+1)} \right) \underset{\text{Telesk.}}{=} \frac{1}{8} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{(1-\frac{1}{2})\cdot 1} - \frac{1}{(n+\frac{1}{2})(n+1)} \right) = \frac{1}{4}$ ■

(c) $\sum_{k=0}^{\infty} \max\left\{ \frac{8}{3^k} ; \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} \right\}$. k gerade $\Rightarrow a_k = \frac{8}{3^k} > 0 > \frac{-2}{2^k}$

k ungerade: $\frac{8}{3^k} < \frac{2}{2^k} \Leftrightarrow 4 < \left(\frac{3}{2}\right)^k$; $k=0: 4 < 1$ ↯ , $k=1: 4 < \frac{3}{2}$ ↯

$k=2: 4 < \frac{9}{4}$ ↯ , $k=3: 4 < \frac{27}{8}$ ↯

$k=4: 4 = \frac{64}{16} < \frac{81}{16} = \frac{3^4}{2^4}$ ✓ $\Rightarrow$ (Induktion) $\frac{8}{3^k} < \frac{2}{2^k} \Leftrightarrow k \geq 4$

$\Rightarrow a_k = \frac{2}{2^k}$ für ungerade $k \geq 5$

$a_k = \frac{8}{3^k}$ für gerade k oder $k = 1,3$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \max\{..\} \underset{*}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8}{3^{2n}} + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2}{2^{2\ell+5}} + \frac{8}{3} + \frac{8}{27} = \frac{8}{1-1/9} + \frac{2^{-4}}{1-\frac{1}{4}} + \frac{8}{3} + \frac{8}{27}$

$= 9 + \frac{1}{12} + \frac{8}{3} + \frac{8}{27} = \ldots = 12 + \frac{5}{108}$

(d) genauer, oder einfacher: $\max\{a,b\} + \min\{a,b\} = a+b$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \min\{..\} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{8}{3^k} + \frac{\mp 2}{(-2)^k} - \max\{\} \right) \underset{*}{=} 8 \sum_{0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k \mp 2 \sum_{0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k - \sum_{k=0}^{\infty} \max\{..\} =$

$= \frac{8}{1-1/3} \mp \frac{2}{1+\frac{1}{2}} - 12 - \frac{5}{108} = 12 \mp \frac{4}{3} - 12 - \frac{5}{108} = -\frac{41}{108} - 1$

(e) Es gilt $\frac{y}{1-y^2} = \frac{1}{1-y} - \frac{1}{1-y^2}$, $y = x^{2^k}$, $y^2 = x^{2^{k+1}}$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2^k}}{1 \mp x^{2^{k+1}}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1-x^{2^k}} - \frac{1}{1-x^{2^{k+1}}} \right) = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{1-x^{2^0}} - \frac{1}{1-x^{2^{k+1}}} \right) =$

Druckfehler auf Blatt

$= \frac{1}{1-x} - \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1-x^{2^k}} = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{für } |x| > 1 \\ \frac{1}{1-x} - 1 & \text{für } |x| < 1 \end{cases}$

Bei * sind die einzelnen Reihen rechts jeweils konvergent (das zeigt das Ende), daher auch die linke.

…$\boxed{23}$ (2) $H + 2rH + 2r\cdot rH + 2r\cdot r^2H + \ldots + 2Hr^k + \ldots$, denn: Zuerst fällt der Ball die Höhe H, dann steigt er auf die Höhe rH und fällt diese wieder runter, dann steigt er auf $r\cdot rH$ und ….

$$\Rightarrow \text{Weg} = 2H\sum_{k=0}^{\infty} r^k - H = \frac{2H}{1-r} - H = \frac{2H - H + Hr}{1-r} = H\cdot\frac{1+r}{1-r}$$

$\blacksquare$

$\boxed{22}$ für fast alle n (ffa n): $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le \frac{n-\beta}{n} \Rightarrow n|a_{n+1}| \le n|a_n| - \beta|a_n|$

$$\Rightarrow \underbrace{(\beta-1)}_{>0}|a_n| \le (n-1)|a_n| - n|a_{n+1}| \quad\Rightarrow\quad n|a_{n+1}| \le (n-1)|a_n|$$

$\Rightarrow \left(n|a_{n+1}|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist fallend ab einer Stelle, nach unten beschränkt durch 0, also konvergent. Die Teleskop-Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\left((n-1)|a_n| - n|a_{n+1}|\right)$ ist also konvergent und majorisiert $(\beta-1)\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$.

Aus der Divergenz-Bedingung folgt, daß ab einer Stelle alle a_n das gleiche Vorzeichen haben, obda $+$ (ansonsten betrachte $-a_n$), und daß dann $n\,a_{n+1} \ge (n-1)a_n > 0$.

$\Rightarrow (n\,a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ist ab dieser Stelle wachsend und positiv. Also liegt $n\,a_{n+1}$ irgendwann oberhalb einer positiven Zahl α, also $a_{n+1} > \frac{\alpha}{n}$ für $n > n_1$. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha}{n}$ ist daher divergente Minorante.

$\blacksquare$

$\boxed{24}$ $\sqrt{a_k a_{k+1}} \underset{AGM}{\le} \frac{1}{2}(a_k + a_{k+1})$, $\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} a_k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} = \sum_{0}^{\infty}\frac{1}{2}(a_k + a_{k+1})$ ist also Majo.

Gegenbeispiel zur Umkehrung: $a_{2n+1} = n$, $a_{2n} = \frac{1}{n^5}$ $\Rightarrow \sqrt{a_{2n}a_{2n+1}} = \sqrt{\frac{n}{n^5}} = \frac{1}{n^2}$

$$\sqrt{a_{2n+1}a_{2n+2}} = \sqrt{\frac{n}{(n+1)^5}} < \sqrt{\frac{n}{n^5}} = \frac{1}{n^2}$$

$\sum\frac{1}{n^2}$ ist konv. Majo. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist also divergent, da $a_{2n+1} \to \infty \ne 0$

Gilt zusätzlich Monotonie: $\sqrt{a_k a_{k+1}} \to 0$ $(k\to\infty)$, da die Reihe $\sum\sqrt{\ldots}$ konv.

Wären die a_k monoton wachsend, dann $\sqrt{a_k a_{k+1}} \ge \sqrt{a_k^2} = a_k \ge a_1$. Wäre a_1 (oder irgendein a_{k_0}) > 0, widerspräche das $\sqrt{a_k a_{k+1}} \to 0$ $\Rightarrow (a_k)$ fallend (oder der triviale Fall $a_k = 0\ \forall k\in\mathbb{N}$, was aber auch fallend ist)

$\Rightarrow \sqrt{a_k a_{k+1}} \ge \sqrt{a_{k+1}^2} = a_{k+1} \Rightarrow \sum_{1}^{\infty}\sqrt{a_k a_{k+1}}$ ist konv. Majo für $\sum_{1}^{\infty} a_k$.

$\blacksquare$