17 ⓐ $a_k := \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} = \frac{1}{(1+\frac{1}{k})^k} \cdot \frac{1}{k+1}$ ist eine fallende Nullfolge, da (bek.)

$(1+\frac{1}{k})^k$ wachsend ist $\underset{\text{gegen } e}{}$ und $\frac{1}{k+1}$ fallend gegen 0

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ ist konvergent nach dem Leibniz-Kriterium.

Keine absolute Konvergenz:

$\left|(-1)^k a_k\right| = a_k \underset{s.o.}{\geq} \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{k+1}$, $\frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}$ ist divergente Minorante.

ⓑ $\lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{3+2^{k+2}}}{\sqrt[3]{2+3^{k+3}}} \frac{\sqrt[3]{3^k}}{\sqrt{2^k}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt{\frac{3}{2^k}+4} \cdot \lim_{k\to\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{\frac{2}{3^k}+27}} = \sqrt{4}/\sqrt[3]{27} =: \ldots < 1$

$\Rightarrow \exists k_0 \in \mathbb{N}: \forall k \geq k_0: \frac{\sqrt{3+2^{k+2}}}{\sqrt[3]{2+3^{k+3}}} \leq \frac{\sqrt{2^k}}{\sqrt[3]{3^k}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}}\right)^k$

$\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}}\right)^6 = \frac{8}{9} < 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}} < 1$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{3+2^{k+2}}}{\sqrt[3]{2+3^{k+3}}} \leq \underbrace{\sum_{k=0}^{k_0-1} \cdots}_{=:\alpha} + \sum_{k=k_0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}}\right)^k \leq \alpha + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}}\right)^k =$

$= \alpha + \frac{1}{1-\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}}} < \infty$ $\Rightarrow$ Reihe absolut konvergent (Glieder ≥ 0)

(Monotonie-Kriterium bzw. Majoranten-Kr.)

ⓒ Wurzel-Krit.

$\sqrt[n]{|c_n|} = \left(\frac{n^2+(-1)^n}{n^2+2}\right)^{n^2} =$

n gerade: $\sqrt[n]{c_n} = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n^2+1}}\right)^{n^2} = 1/\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)^{n^2+1} \cdot \left(1+\frac{1}{n^2+1}\right) \longrightarrow \frac{1}{e} \cdot 1 \ (n\to\infty)$

n ungerade >1: $\sqrt[n]{c_n} = \left(\frac{n^2-1}{n^2-1+3}\right)^{n^2} = \left(\left(1+\frac{3}{n^2-1}\right)^{\frac{n^2-1}{3}}\right)^{-3} \cdot \frac{1}{1+\frac{3}{n^2-1}} \longrightarrow \frac{1}{e^3} \ldots$

$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow$ abs. Konvergenz ($c_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}_0$).

ⓓ Quotienten-Krit.: $\left|\frac{d_{n+1}}{d_n}\right| = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{(1+\frac{1}{n})^2}{(2+\frac{1}{n})(2+\frac{2}{n})} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{4} < 1$

$\Rightarrow$ abs. Konvergenz.

$\boxed{18.}$ (a) Es gilt

$$(*)\quad \begin{cases} \beta = \liminf_{n\to\infty} b_n \iff \forall \varepsilon > 0: \text{ für höchstens endlich viele } n \in \mathbb{N} \text{ gilt } b_n < \beta - \varepsilon \\ \qquad \text{und für unendlich viele } n \text{ gilt } b_n < \beta + \varepsilon \\ \text{Analoges gilt für } \limsup \end{cases}$$

Sei $\varepsilon > 0$ bel. Nach $(*)$ $\underbrace{\text{gilt}}_{\exists n_0:}$ $\frac{a_n}{a_{n-1}} < a + \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 + 1 \quad \left(a := \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$

Sei $n > n_0$. $\Rightarrow$

$$a_n = \underbrace{\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}}}_{\text{alle } < a+\varepsilon} \cdot \underbrace{\frac{a_{n_0}}{a_{n_0-1}} \cdots \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1}_{=: A} \leq (a+\varepsilon)^{n-n_0} \cdot A$$

Sowas, $A = a_{n_0}$ freilich!

$$\Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \leq (a+\varepsilon) \sqrt[n]{\frac{A}{(a+\varepsilon)^{n_0}}} \quad \text{für jedes } n > n_0$$

$\Rightarrow \left(\sqrt[n]{a_n}\right)$ ist beschränkt und $\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \underset{\text{klar}}{\leq} \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq a + \varepsilon$, denn:

$\limsup_{n\to\infty} (a+\varepsilon) \sqrt[n]{\frac{A}{(a+\varepsilon)^{n_0}}} = (a+\varepsilon) \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{A}{(a+\varepsilon)^{n_0}}} = 1 \quad (A > 0)$ und

$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{j\to\infty} \sqrt[n_j]{a_{n_j}}$ für eine geeignete Folge (n_j) natürlicher Zahlen (Def. limsup als lim einer Teilfolge)

$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq a$, da $\varepsilon > 0$ beliebig.

Analog: $\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$

Andere Lösung: [illegible] $a_n = a_{n_0} \prod_{j=n_0}^{n-1} \frac{a_{j+1}}{a_j} \leq a_{n_0} \prod_{j=n_0}^{n-1} \sup_{k\geq n_0} \frac{a_{k+1}}{a_k}$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{a_{n_0}} \underbrace{\left(\sup_{k\geq n_0} \frac{a_{k+1}}{a_k}\right)}_{>0 \text{ klar}}^{\frac{n-n_0}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \cdot \sup_{k\geq n_0} \frac{a_{k+1}}{a_k} \cdot 1$$

analog $\sqrt[n]{a_n} \cancel{\leq} \geq \sqrt[n]{a_{n_0}} \left(\inf_{k\geq n_0} \frac{a_{k+1}}{a_k}\right) \cdot \underbrace{\left(\inf_{k\geq n_0} \frac{a_{k+1}}{a_k}\right)}_{\text{falls dies } > 0, \text{ ansonsten } \sqrt[n]{a_n} \geq 0}^{-\frac{n_0}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} \inf_{k\geq n_0} \frac{a_{k+1}}{a_k}$

S. 3

somit $\inf\limits_{k\geq n_0} \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \sup\limits_{k\geq n_0} \frac{a_{k+1}}{a_k}$

(wegen $b_n < c_n \Rightarrow \liminf b_n \leq \liminf c_n$ etc.)

Dies gilt für jedes $n_0 \in \mathbb{N}$ und daher folgt mit $\underset{n\to\infty}{\overset{\sup}{\liminf}}\, b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\overset{\sup}{\inf\limits_{k\geq n}} b_k\right) = \overset{\inf\ \sup}{\sup\limits_n} \left(\inf\limits_{k\geq n} b_k\right)$

$$\liminf \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \liminf \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \frac{a_{k+1}}{a_k}$$

$\boxed{H8}$ (b) $\forall n \in \mathbb{N}$: $\cancel{a_n = \frac{1}{n!} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0}$, $\cancel{(a) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \to 0}$

$b_n := \frac{n^n}{n!} \Rightarrow \frac{b_{n+1}}{b_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} e$, (a) $\Rightarrow \sqrt[n]{b_n} \to e$

(Wegen $\underset{\text{Zähler}}{n \to \infty}$ folgt dann auch $\underset{\text{Nenner}}{\sqrt[n]{n!}} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$.)

Andere Variante.

Wir zeigen $\frac{1}{e} \leq \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \leq \frac{1}{e} \sqrt[n]{e \cdot n}$

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$ wachsend $\Rightarrow \left(\frac{2}{1}\right)^1 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdots \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{(n+1)^n}{n!} < e^n$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt[n]{n!}}{n+1} > \frac{1}{e}$$

$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{e}$ wachsend (kommt hoffentlich in gr. Üb.)

genauso wie gerade $\Rightarrow \frac{(n-1)!}{n^n} < \frac{1}{e^{n-1}} \Rightarrow \frac{n!}{n^{n+1}} < \frac{1}{e^n} \cdot e$

$$\Rightarrow \frac{1}{e} \leq \lim \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \leq \frac{1}{e} \lim \sqrt[n]{e \cdot n} = \frac{1}{e}$$

19 ⓐ $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k+(-2)^k}{6^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{3}} - 1$$

das geht, weil rechts zwei abs. konv. Reihen stehen $\quad = \frac{3}{4}$ (geometr. Reihe)

ⓑ $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right) \underset{\text{Teleskop-Reihe}}{=} \frac{1}{1} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)!} = 1$$

ⓒ $$\sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} \frac{1}{3^{k+m}} = \frac{1}{3^k} \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} \left(\frac{1}{3}\right)^m 1^{k-m} \underset{\text{Bin. Satz}}{=} \frac{1}{3^k}\left(1+\frac{1}{3}\right)^k = \left(\frac{4}{9}\right)^k$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} \frac{1}{3^{k+m}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{4}{9}} - 1 = \frac{4}{5}$$

0-tes Glied fehlt!

ⓓ $$\frac{1}{1\cdot 4\cdot 7} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)(3n+4)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-\frac{2}{3})(n+\frac{1}{3})(n+\frac{4}{3})} \cdot \frac{1}{27}$$

$$= \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{2\cdot \cancel{\tfrac{4}{3}}(1-\frac{2}{3})(2-\frac{2}{3})} = \frac{1}{27}\cdot\frac{9}{8} = \frac{1}{24}$$

mit der Formel (gr. Übung) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+\alpha)(n+1+\alpha)\cdots(n+p+\alpha)} = \frac{1}{p(1+\alpha)\cdots(p+\alpha)}$$

$$p=2,\ \alpha = -\frac{2}{3}$$

20 $$a_n = \left(1+\left(2+\frac{1}{n}\right)(-1)^n\right)(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}, \quad \mathbb{N} = \underbrace{\{4k\} \cup \{4k-1\} \cup \{4k-2\} \cup \{4k-3\}}_{k\in\mathbb{N}}$$

$n=4k$: $a_{4k} = 3+\frac{1}{4k} \xrightarrow{k\to\infty} 3$, $\sup_k a_{4k} = \frac{13}{4} = a_4$, $\inf_k a_{4k} = 3$

$n=4k-1$: $a_{4k-1} = \left(-1-\frac{1}{n}\right)(-1)^{(4k-1)\cdot 2k} = -1-\frac{1}{4k-1} \xrightarrow{k\to\infty} -1$ streng wachsend

$\Rightarrow \sup a_{4k-1} = -1$, $\inf a_{4k-1} = a_3 = -\frac{4}{3}$

$n=4k-2$: $a_{4k-2} = \left(3+\frac{1}{4k-2}\right)(-1)^{(2k-1)(4k-1)} = -3-\frac{1}{4k-2} \longrightarrow -3$

$\sup = -3$, $\inf = a_2 = -\frac{7}{2}$

$n=4k-3$: $a_{4k-3} = \left(-1-\frac{1}{4k-3}\right)(-1)^{(4k-3)(2k-1)} = 1+\frac{1}{4k-3} \longrightarrow 1$ fallend

$\Rightarrow \sup = 2 = a_1$, $\inf = 1$

Fazit: $\limsup a_n = 3$, $\liminf a_n = -3$, $H(a_n) = \{-3,-1,1,3\}$, $\sup a_n = \frac{13}{4}$, $\inf a_n = -\frac{7}{2}$

20 (b) $b_n = \dfrac{(-1)^n n^2 + 2n - 4}{n^2+1}$

$\mathbb{N} = \{\text{alle geraden}\} \cup \{\text{alle ungeraden}\}$

$\inf b_n \leq b_1 = -\frac{3}{2}$, $b_n = \dfrac{(-1)^n(n^2+1) + 2n - (4 + (-1)^n)}{n^2+1} = (-1)^n - \dfrac{(-1)^n}{n^2+1} + \dfrac{2n-4}{n^2+1}$

$\geq -1 - \dfrac{1}{n^2+1} + \dfrac{2n-4}{n^2+1} \geq -1 - \dfrac{1}{2} + 0 = -\dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow \inf b_n = -\frac{3}{2}$

$b_6 = \frac{44}{37} \Rightarrow \sup b_n \geq \frac{44}{37}$

1. Fall n ungerade: $b_n = -1 + \dfrac{2n-3}{n^2+1} \leq -1 - \dfrac{3}{n^2+1} + \dfrac{2n}{n^2} \leq -1 + 2 = 1 < \dfrac{44}{37}$

2. Fall n gerade: $n = 2k$

$$b_{2k} = \frac{4k^2+4k-4}{4k^2+1} = \frac{k^2+k-1}{k^2+\frac{1}{4}} = 1 + \frac{k-\frac{5}{4}}{k^2+\frac{1}{4}}$$

$\left(\dfrac{k-\frac{5}{4}}{k^2+\frac{1}{4}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ist fallend für $k \geq 3$: $\dfrac{k-\frac{5}{4}}{k^2+\frac{1}{4}} - \dfrac{(k+1)-\frac{5}{4}}{(k+1)^2+\frac{1}{4}} > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (k-\frac{5}{4})(k^2+2k+\frac{5}{4}) - (k-\frac{1}{4})(k^2+\frac{1}{4}) > 0 \Leftrightarrow 2k^2 + \frac{5}{4}k - \frac{5}{4}k^2 - \frac{5}{2}k - \frac{25}{16}$
$- \frac{1}{4}k + \frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{16} > 0$

$\Leftrightarrow k^2 - \frac{3}{2}k - \frac{3}{2} > 0 \Leftrightarrow (k-\frac{3}{4})^2 > \frac{9}{16} + \frac{24}{16} = \frac{33}{16}$

$\Leftarrow (k-\frac{3}{4})^2 > \frac{36}{16} = (\frac{3}{2})^2 \Leftarrow k > \frac{3}{2} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4} \Leftarrow k \geq 3$

$b_2 = 1 + \dfrac{1-\frac{5}{4}}{1+\frac{1}{4}} = \dfrac{4}{5}$, $b_4 = 1 + \dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{17}{4}} = \dfrac{20}{17} < \dfrac{44}{37}$ $(\Leftrightarrow 20 \cdot 37 = 740 < 44 \cdot 17 = 74$

$\Rightarrow \sup b_n = b_6 = \frac{44}{37}$

$\liminf\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{k\to\infty} b_{2k-1} = -1$, $\limsup\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{k\to\infty} b_{2k} = 1$