[9] K (a) $a_0 = 1,\quad a_1 = \frac{1}{1!} - \frac{1}{1} = 0,\quad a_2 = \frac{1}{2!} - \frac{0}{2} = \frac{1}{2}$

$a_3 = \frac{1}{3!} - \frac{1/2}{3} = 0,\quad a_4 = \frac{1}{4!} - \frac{0}{4}$

Vermutung: $\boxed{a_{2k} = \frac{1}{(2k)!},\quad a_{2k+1} = 0}$

Beweis: $k=0$: $a_0 = \frac{1}{0!}$ ✓, $a_1 = 0$ ✓ IV: Es gelte $a_{2k} = \frac{1}{(2k)!}$, $a_{2k+1} = 0$

$k \to k+1$: $a_{2(k+1)} = \frac{1}{(2(k+1))!} - \frac{a_{2k+1}}{2k+2} \underset{\substack{\text{I.V.}\\ a_{2k+1}=0}}{=} \frac{1}{(2k+2)!}$ ✓

$a_{2(k+1)+1} = \frac{1}{(2k+3)!} - \frac{a_{2(k+1)}}{2k+3} = \frac{1}{(2k+3)!} - \frac{1}{(2k+2)!\cdot(2k+3)} = 0$ ✓

(b) Betrachte $b_n := \frac{1}{a_n}$: $b_0 = 1$, $b_{n+1} = b_n + 1 + 2n \quad (n \in \mathbb{N}_0)$

$b_1 = 1 + 2\cdot 0 + 1 = 2,\quad b_2 = 2 + 2\cdot 1 + 1 = 5,\quad b_3 = 5 + 4 + 1 = 10$

I.V.: $b_n = n^2 + 1$

I.A.: $b_0 = 1$ ✓

I.S.: $b_{n+1} = b_n + 2n + 1 \underset{\text{IV}}{=} n^2 + 2n + 2 = (n+1)^2 + 1$ ■

(b) $\Rightarrow a_n = \frac{1}{n^2+1}$

(c) $\cancel{a_0 = 3,\ a_1 = \frac{10-6}{3} = \frac{4}{3},}\ a_2 = \frac{10 - 8/3}{3} = \frac{22}{9},\quad a_3 = \frac{10 - 44/9}{3} = \frac{46}{27}$

$\cancel{a_{n+1} = \frac{10}{3} - \frac{2}{3}a_n = \frac{10}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{10}{3} - \frac{2}{3}a_{n-1}\right) =}$

allg.: $a_{n+1} = \gamma + \beta a_n = \gamma + \beta(\gamma + \beta a_{n-1}) = \dots = \gamma + \beta(\gamma + \beta(\dots\gamma + \beta(\gamma + \beta a_0)\dots)) =$

$a_n \quad a_{n-1} \quad \dots \quad a_1 \quad a_0$

$= a_0 \cdot \beta^{n+1} + \gamma(\beta^n + \beta^{n-1} + \dots + \beta^1 + \beta^0) = a_0\beta^{n+1} + \gamma\frac{1-\beta^{n+1}}{1-\beta} =$

$= \gamma\frac{1}{1-\beta} + \beta^{n+1}\left(a_0 - \frac{\gamma}{1-\beta}\right) \underset{\substack{\gamma = \frac{10}{3}\\ \beta = -\frac{2}{3}}}{=} 2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}\cdot(3 - 2) = 2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

$a_n = 2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n$

Beweis (Ind.): $a_0 = 2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^0 = 3$ ✓

„$n \to n+1$": $a_{n+1} = \frac{10}{3} - \frac{2}{3}\left(2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n\right) = \frac{10-4}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ ■

(d)

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \underset{n\in\mathbb{N}}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{1}{2}\left(\sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu + a_n\right) = a_n + \frac{1}{2}a_n = \frac{3}{2}a_n$$

IV: $\boxed{a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} a_1 \text{ für } n\in\mathbb{N},\ a_1 = \frac{1}{2}a_0 = 42}$ $a_0 = 84$

IA: $a_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^0 a_1$ ✓ $\left(a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + a_0) = \frac{3}{2}\cdot a_1\right.$ ✓$\left.\right)$

IS „$n \to n+1$": $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu + a_n\right) = a_n + \frac{1}{2}a_n = \frac{3}{2}a_n \underset{IV}{=} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1+1} a_1$ ■

10 K

$$a_n = \frac{21 - 17\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^4} + \frac{2}{n^6}}{\frac{99}{n^7} - \frac{1}{n^6} - \frac{37}{5n^5} + \frac{35}{n^4} + \frac{2}{n^3} - \frac{7}{3n^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2}}$$

Sätze: $x_n \to x,\ y_n \to y \Rightarrow x_n + y_n \to x+y$, $x_n \cdot y_n \to x\cdot y$

$\frac{x_n}{y_n} \to \frac{x}{y}$ falls $y \neq 0$

Somit geht der Zähler gegen 21, der Nenner gegen $\frac{1}{2}$; ergo: $\lim_{n\to\infty} a_n = 42$

(b_n) divergiert, da unbeschränkt: $|b_n| = \left(n - \frac{1}{n}\right)^n \geq (n-1)^n \geq n-1$

Es gilt $\sum_{j=1}^{2n}(-1)^{j+1} j = -n$.

Beweis: $n=1$: $\sum_{j=1}^{2}(-1)^{j+1} j = 1-2 = -1$ ✓ ($n=0$ stimmt auch)

„$n \to n+1$": $\sum_{j=1}^{2n+2} j(-1)^{j+1} = \sum_{j=1}^{2n} j(-1)^{j+1} + (2n+1) - (2n+2) = -n + 2n + 1 - 2n - 2$
$= -(n+1)$

Somit: $c_n = \frac{-n}{\sqrt{n+1}} = -\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \leq -\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}$

(c_n) ist demnach unbeschränkt $(c_n \to -\infty)$.

Wir verwenden $x^{n+1} - y^{n+1} = (x-y)\sum_{j=0}^{n} x^j y^{n-j}$ mit $x = \sqrt[3]{k^3+1}$, $y = \sqrt[3]{k^3-1}$, $n=2$

$$d_k = k^2(x-y) = k^2\frac{x^3-y^3}{\sum_{j=0}^{2} x^{2-j}y^j} = \frac{2k^2}{(k^3+1)^{2/3} + (k^3+1)^{1/3}(k^3-1)^{1/3} + (k^3-1)^{2/3}} =$$

$$= \frac{2}{\left(1+\frac{1}{k^3}\right)^{2/3} + \left(1+\frac{1}{k^3}\right)^{1/3}\left(1-\frac{1}{k^3}\right)^{1/3} + \left(1-\frac{1}{k^3}\right)^{2/3}}$$

Bekannt: $x_n \to x \ (n\to\infty) \Rightarrow x_n^r \to x^r \ (n\to\infty)$ für $r \in \mathbb{Q}$

(aufpassen bei $r<0$, $x=0$ oder negativen Radikanden)

Hier: $\frac{1}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \Rightarrow \pm\frac{1}{k^3} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \Rightarrow 1 \pm \frac{1}{k^3} \xrightarrow{k\to\infty} 1 \Rightarrow \left(1\pm\frac{1}{k^3}\right)^{\frac{2}{3}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$

Somit: $d_k \xrightarrow{k\to\infty} \dfrac{2}{1+1\cdot 1+1} = \dfrac{2}{3}$

11 Die Folge $((-1)^n)$ ist divergent laut Vorlesung. Aber es gilt $|(-1)^n + (-1)^{n+1}| = 0 < \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$. Wir haben also ein Gegenbeispiel zu (a).

(b) (a_n) ist Nullfolge.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und $\varepsilon_0 := \sqrt[4]{\frac{\varepsilon}{7}} > 0$. Nach Vor. gibt es zu ε_0 ein $n_0(\varepsilon_0) \in \mathbb{N}$, sodaß für alle $n > n_0$ gilt: $|a_n| < 7\varepsilon_0^4 = \varepsilon$. Folglich gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(c) Gegenbeispiel: $a_n = \frac{1}{2}$

Die Voraussetzung ist gleichbedeutend mit $\forall \varepsilon>0 \ \exists n_0 \ \forall n>n_0 : |a_n|^n < \varepsilon$.

Dies ist für $a_n = \frac{1}{2}$ erfüllt $\left(\frac{1}{2^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0\right)$, aber $\frac{1}{2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ ist falsch.

(d) Gegenbeispiel: $a_n = -1 \Rightarrow |a_n^2 + a_n| = 0 < \varepsilon$ gilt für alle n und alle $\varepsilon>0$.

Aber ~~an~~ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ist falsch.

12 (a) Induktion. Für $n=1$ lauten die Voraussetzungen $x_1 > 0$ und $x_1 = 1$. Die Behauptung $\sum\limits_{\nu=1}^{1} x_\nu = x_1 \geq n = 1$ ist richtig.

„$n \to n+1$": Sind alle $x_\nu = 1$ $(\nu = 1,\dots,n+1)$, dann gilt $\sum\limits_{\nu=1}^{n+1} x_\nu = n+1$.

Falls nicht, dann gilt obda $x_1 < 1 < x_2$ (eines <1, ein anderes >1, damit $\prod x_\nu = 1$)

$\Rightarrow (1-x_1)(x_2-1) > 0 \iff x_1 + x_2 > 1 + x_1x_2$. Wir wenden die Induktionsvoraussetzung auf die n positiven Zahlen $x_1\cdot x_2, x_3, \dots, x_{n+1}$ an, deren Produkt $=1$ ist

$\Rightarrow x_1x_2 + \sum\limits_{\nu=3}^{n+1} x_\nu \geq n \Rightarrow \sum\limits_{\nu=1}^{n+1} x_\nu > 1 + x_1x_2 + \sum\limits_{\nu=3}^{n+1} x_\nu \geq n+1$.

Gleichheit $\iff$ alle $x_\nu = 1$: „$\Leftarrow$" ist klar; „$\Rightarrow$" wurde gerade durch Kontraposition gezeigt.

12 b) Behauptung: alle $x_\nu > 0 \Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \underset{(1)}{\geq} \left(\prod_{\nu=1}^{n} x_\nu\right)^{1/n} \underset{(2)}{\geq} \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{x_\nu}}$

arithmetisches $\geq$ geometrisches $\geq$ harmonisches Mittel

Gleichheit jeweils $\Leftrightarrow$ alle x_ν gleich (3)

Beweis von (1) (AGM-Ungleichung)

Setze $G := \left(\prod_{\nu=1}^{n} x_\nu\right)^{1/n}$, $y_\nu := \frac{x_\nu}{G}$ $(\nu = 1, \dots, n)$ $(G > 0)$

Es seien nicht alle x_ν gleich $(\Rightarrow n > 1)$

$\prod_{\nu=1}^{n} y_\nu = 1 \overset{(a)}{\Longrightarrow} \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu > n$ (nicht alle y_ν sind 1)

$\Leftrightarrow \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu > n \cdot G \Leftrightarrow$ (1) mit „>"

(2) $z_\nu := \frac{1}{x_\nu}$ $(\nu = 1, \dots, n)$ (nicht alle gleich)

Es wurde gerade gezeigt: $\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} z_\nu > \left(\prod_{\nu=1}^{n} z_\nu\right)^{1/n} \Leftrightarrow$ (2) mit „>"

(3) „$\Leftarrow$" ist klar; „$\Rightarrow$" wurde durch Kontraposition gezeigt (nicht alle gleich $\Rightarrow$ „>")