A5 (a) $\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j+1}\binom{n}{j} = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j+1}\frac{n!}{j!(n-j)!} = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\frac{(n+1)!}{(j+1)!(n+1-(j+1))!} =$

$= \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\binom{n+1}{j+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k} = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}1^k 1^{n+1-k} - \binom{n+1}{0}\right)$

$\underset{\text{Bin. Satz}}{=} \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right)$ ∎

$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j j\binom{n}{j} = \sum_{j=1}^{n}(-1)^j j\frac{n!}{j!(n-j)!} = n\cdot\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\frac{(n-1)!}{(j-1)!(n-1-(j-1))!} =$

$= -n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}(-1)^k = -n(1-1)^{n-1} = \begin{cases} -1 & \text{für } n=1 \\ 0 & \text{für } n \geq 2 \text{ oder } n= \end{cases}$ ∎

(b) Vollständige Induktion. Induktionsanfang (I1), $n=1$: $\sum_{j=1}^{2\cdot1}\frac{(-1)^{j+1}}{j} = \frac{1}{1}-\frac{1}{2} \overset{!}{=} \sum_{j=1+1}^{2}\frac{1}{j}$ ✓

Ind.annahme: Die Formel sei richtig für ein $n \in \mathbb{N}$ (I2)

Induktionsschluß (I3), $n \rightsquigarrow n+1$: $\sum_{j=1}^{2n+2}\frac{(-1)^{j+1}}{j} = \sum_{j=1}^{2n}\frac{(-1)^{j+1}}{j} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+2} =$

$\underset{(I2)}{=} \sum_{j=n+1}^{2n}\frac{1}{j} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \sum_{j=n+2}^{2n+2}\frac{1}{j} + \frac{1}{n+1} - 2\cdot\frac{1}{2n+2} = \sum_{j=n+2}^{2n+2}\frac{1}{j}$ ∎

(I1) $n=1$: $\prod_{k=1}^{1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = 2 = \frac{(1+1)^1}{1!}$ ✓

(I2) Die Formel gelte für n.

(I3) $\prod_{k=1}^{n+1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \underset{(I2)}{=} \frac{(n+1)^n}{n!}\cdot\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} =$

$= \frac{(n+2)^{n+1}}{n!\cdot(n+1)}$ ✓ ∎

Es gilt $\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$ (Vorlesung)

$\boxed{6}$ (i) $\sum_{j=1}^{1} j^2 = 1 = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}$ ✓. (I2) Die Formel gelte für n.

$n \rightsquigarrow n+1$: $\sum_{j=1}^{n+1} j^2 = \sum_{j=1}^{n} j^2 + (n+1)^2 \underset{(I2)}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =$

$= \frac{n+1}{6}\left(2n^2+n+6n+6\right) = \frac{n+1}{6}(n+2)(2n+3)$ ✓ ∎

(ii) $\sum_{j=1}^{1} j^3 = 1 = \left(\frac{1\cdot 2}{2}\right)^2$ ✓ (I2) sei wieder die Gültigkeit für n.

(I3) $n \rightsquigarrow n+1$: $\sum_{j=1}^{n+1} j^3 = \sum_{j=1}^{n} j^3 + (n+1)^3 \underset{(I2)}{=} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 =$

$= \left(\frac{n+1}{2}\right)^2\left(n^2+4(n+1)\right) = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2\cdot(n+2)^2$ ✓ ∎

(iii) (I1) $n=1$ (Wir machen Induktion nach n; $k\in\mathbb{N}$ ist fest):

$\sum_{j=1}^{1}\prod_{\ell=0}^{k-1}(j+\ell) = \prod_{\ell=0}^{k-1}(\ell+1) = k! = \frac{1}{k+1}\prod_{\ell=0}^{k}(1+\ell)$ ✓

(I2) Es gelte für n.

(I3) $n\rightsquigarrow n+1$: $\sum_{j=1}^{n+1}\prod_{\ell=0}^{k-1}(j+\ell) = \sum_{j=1}^{n}\cdots + \prod_{\ell=0}^{k-1}((n+1)+\ell) \underset{(I2)}{=} \frac{1}{k+1}\prod_{\ell=0}^{k}(n+\ell) + \prod_{\ell=0}^{k-1}(n+\ell+1)$

$= \frac{1}{k+1}\cdot n\cdot\prod_{j=0}^{k-1}(n+1+j) + \prod_{\ell=0}^{k-1}(n+1+\ell) = \left(\prod_{\ell=0}^{k-1}(n+1+\ell)\right)\cdot\frac{n+1+k}{k+1} = \frac{1}{k+1}\prod_{\ell=0}^{k}(n+1+\ell)$ ✓ ∎

$\boxed{7}$ (a) $\forall a\in A, b\in B$: $a\geq \inf A$, $b\leq \sup B \Rightarrow \forall a\in A, b\in B$: $a-b \geq \inf A - \sup B$

$\Rightarrow \inf(A-B) \geq \inf A - \sup B$.

$\forall \varepsilon>0\ \exists a\in A, b\in B$: $a < \inf A+\varepsilon$, $b > \sup B - \varepsilon$

$\Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists a\in A, b\in B$: $a-b < \inf A - \sup B + 2\varepsilon$

$\Rightarrow \bigwedge_{\forall\varepsilon>0} \inf(A-B) < \inf A - \sup B \quad\Rightarrow \inf(A-B)\leq \inf A - \sup B$

Fazit: $\inf(A-B) = \inf A - \sup B$

analoge Formeln: $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$

$\sup(A+B) = \sup A + \sup B$

$\sup(A-B) = \sup A - \inf B$

$\sup(-B) = -\inf B \quad (A=\{0\})$ falls rechte Seite existiert.

$\inf(-B) = -\sup B$

(b) Zunächst hat M eine obere Schranke, denn falls nicht, dann:

$\boxed{7}^K$ $\forall y \in \mathbb{R}\ \exists x \in M: x > y \overset{(1)}{\Longrightarrow} \forall y \in \mathbb{R}: y \in M \Rightarrow \mathbb{R} \subseteq M \subseteq \mathbb{R}$

$\Rightarrow M = \mathbb{R}$ ↯

Supremumsprinzip $\Rightarrow \exists\, s := \sup M \in \mathbb{R}$

$s \notin M$, sonst gäbe es nach (2) ein $x \in M$ mit $x > s$ ↯ zu s = obere Schranke von M

Sei nun $x \in \mathbb{R}$, $x < s$ $\Rightarrow \exists\, y \in M: x < y < s$, sonst wäre $x < s$ eine OS von M ↯ zu $s = \sup M$. Mit (1) folgt $x \in M$. $x < s$ war beliebig, also gilt

$$\left.\begin{array}{l} \{x \in \mathbb{R}: x < s\} = (-\infty, s) \subseteq M \\ s = \sup M \notin M \Rightarrow M \subseteq (-\infty, s) \end{array}\right\} \Rightarrow M = (-\infty, s) \qquad \blacksquare$$

$\boxed{8}$ (a) Alles mit Induktion.

$n = 1$: $11^{1+1} + 12^{2-1} = 121 + 12 = 133$ ist Vielfaches von 133 ✓

$n \to n+1$: $11^{n+2} + 12^{2n+1} = 11 \cdot \left(11^{n+1} + 12^{2n-1}\right) + 12^{2n-1} \cdot \left(12^2 - 11\right) =$

$$= 11 \cdot \underbrace{\left(11^{n+1} + 12^{2n-1}\right)}_{\text{VF von 133 nach Induktionsannahme}} + 12^{2n-1} \cdot 133 = \text{VF von } 133$$

(b) $n = 1$: $3^{2^1} - 1 = 8 = 2^3 \cdot 1$ ✓

$n \rightsquigarrow n+1$: $3^{2^n \cdot 2} - 1^2 = \left(3^{2^n} + 1\right)\underbrace{\left(3^{2^n} - 1\right)}_{\text{VF von } 2^{n+2} \text{ nach Annahme}}$

3^k ist stets ungerade, $3^{2^n} + 1$ demnach gerade, der ganze Ausdruck also durch 2^{n+3} teilbar.

(c) Entweder man sieht, daß dies der Ausdruck für $\sum_{j=1}^{n} j^2$ aus Aufgabe $\boxed{6}$ ist oder wieder Induktion: $\frac{1}{6} + \frac{1^2}{2} + \frac{1^3}{3} = 1 \in \mathbb{N}$

$n \rightsquigarrow n+1$: $\frac{n+1}{6} + \frac{(n+1)^2}{2} + \frac{(n+1)^3}{3} = \frac{n}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3} + \frac{1}{6} + \frac{2n}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3n^2}{3} + \frac{3n}{3} + \frac{1}{3} =$

$$= \underbrace{\frac{n}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3}}_{\in \mathbb{N} \text{ nach Ann.}} + \underbrace{(n+1)^2}_{\in \mathbb{N}}$$