[1.] ⓐ $M_1 \cap (M_1 \cup M_2) = M_1$

„$\subseteq$" $x \in LS \Leftrightarrow x \in M_1$ und $x \in M_1 \cup M_2 \Leftrightarrow x \in M_1$ und $(x \in M_1$ oder $x \in M_2) \Leftrightarrow x \in M_1$

„$\supseteq$" 2. Aussage: oder $\cap$, oder (und)

ⓑ $s_j := \sup M_j$ $(j = 1, \dots, n)$ (existieren), $s := \max\{s_j : j = 1, \dots, n\}$ ist endlich.

Beweis, daß $s = \sup M$: Sei $x \in M \Leftrightarrow \exists j \in \{1, \dots, n\} : x \in M_j \Rightarrow x \le s_j \le s$

$\Rightarrow s$ ist OS von $M \Rightarrow \sup M$ existiert und $\le s$.

$$\left.\begin{array}{l} s > \sup M \Leftrightarrow \exists j : s_j > \sup M \\ \forall x \in M : x \le \sup M \end{array}\right\} \Rightarrow \forall x \in M_j \subseteq M : x \le \sup M < s_j$$

$\Rightarrow \sup M$ ist OS von M_j $\lightning$ zu s_j $6 = \sup M_j$

also: $s = \sup M$

ⓒ $x \in A \cap B \Rightarrow x \in B \Rightarrow x \ge \inf B$ (existiert, falls $B \neq \emptyset$) $\Rightarrow \inf B$ ist US von $A \cap B$

(egal, wie A aussieht)

Falls A oder B leer ist $\rightsquigarrow A \cap B = \emptyset$ ist beschränkt.

[2] (Die Menge heiße jeweils M)

ⓐ $x \in (a, b] \Leftrightarrow a < x \le b$. D.h. a ist US, b ist OS von $(a, b]^{\neq \emptyset}$, inf und sup existieren

$b \in (a, b] \Rightarrow$ jede OS ist $\ge b$. Somit ist b die kleinste OS, $b = \sup (a, b] = \max (a, b]$ (weil $b \in (a, b]$)

Sei s eine US. Wäre $s > a$, dann $a = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} < \frac{s + a}{2} < \underbrace{s \le b}_{\text{weil eben } b \in (a, b]}$

$\Rightarrow \frac{s+a}{2} \in (a, b]$ $\lightning$ zu s ist US. Also $s \le a$, a ist US $\rightsquigarrow a = \inf (a, b]$.

$\min (a, b]$ ex. nicht, da $a \notin (a, b]$ (oder genauso wie eben Wid. erzeugen).

ⓑ $\frac{|x|}{1 + |x|} = \frac{|x| + 1 - 1}{1 + |x|} = 1 - \frac{1}{|x| + 1}$. $\forall x \in \mathbb{R} : |x| \ge 0 \Rightarrow 1 + |x| \ge 1 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 < \frac{1}{1+|x|} \le 1 \Rightarrow 0 > \frac{-1}{1+|x|} \ge -1 \Rightarrow 1 > 1 - \frac{1}{1+|x|} \ge 0$

$\Rightarrow M \subseteq [0, 1)$

Sei $y \in [0, 1)$ bel., wir lösen $y = 1 - \frac{1}{1+x}$. $\frac{1}{1+x} = 1 - y \Leftrightarrow 1 + x = \frac{1}{1-y}$ $(y \neq 1!)$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{1-y} - 1 \in \mathbb{R}$; $y \in [0, 1) \Leftrightarrow 1 - y \in (0, 1] \Leftrightarrow \frac{1}{1-y} \ge 1$, also $x \ge 0$, $x = |x|$

$\Rightarrow y \in M$. Fazit: $M = [0, 1)$

... $M = [0,1)$ ⇝ analog (a) $\sup M = 1$, $\max M$ ex. nicht, $\inf M = \min M = 0$

(c) $0 \in M \Rightarrow M \neq \emptyset$. $\forall x > -1 : x+1 > x \Rightarrow 1 > \frac{x}{x+1} \Rightarrow 1$ ist OS von M, $s := \sup M$ ex.

Ann: $s < 1$. Dann, mit $x_0 := \frac{1}{1-s} > 0 > -1$: $x_0 + 1 > \frac{1}{1-s} \Rightarrow 1-s > \frac{1}{1+x_0} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 - \frac{1}{1+x_0} = \underbrace{\frac{x_0}{1+x_0}}_{\in M} > s$ ↯ zu $s = \sup M$. Somit $s = 1$, $M \subseteq (-\infty, 1]$

$s \notin M$ da $\frac{x}{1+x} < 1$ f.a. $x > -1$

Beweis, daß $M = (-\infty, 1)$ (man kann das auch vom Himmel fallen lassen und gleich hier beginnen) aber als Motivation sollte der 1. Teil doch gemacht werden

Sei $z < 1$ bel.; wir suchen $x > -1$ mit $\frac{x}{1+x} = z$. Gleichwertig: $x = z + zx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(1-z) = z \Leftrightarrow x = \frac{z}{1-z} = -1 + \frac{1}{1-z} > -1$. Also $z \in M$, $M \supseteq (-\infty, 1)$

$\Rightarrow M$ nach unten unbeschränkt, $\sup M = 1$, $\max M$ ex. nicht.

(d) $\forall x > 0 : x + \frac{1}{x} \geq 2$, denn: $x + \frac{1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 2x \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$ wahr

Wegen $\frac{1}{2} < 1 \leq 2$, $1 + \frac{1}{1} = 2$ ist $2 = \min M$

$2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow$ jede OS von M ist $\geq \frac{5}{2}$. Angenommen $x + \frac{1}{x} > \frac{5}{2}$. Dann $(x > 0)$

$x^2 - \frac{5}{2}x + 1 > 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + 1 - \frac{25}{16} > 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 > \left(\frac{3}{4}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - \frac{5}{4} > \frac{3}{4}$ oder $x - \frac{5}{4} < -\frac{3}{4} \Leftrightarrow x > \frac{8}{4} = 2$ oder $x < \frac{1}{2}$

Somit: $\forall y \in M : y \leq \frac{5}{2} \in M \Rightarrow \max M = \frac{5}{2}$

3 (a) $|2 - 3x| < 3$

1. Fall $2 - 3x \geq 0$ ($\Leftrightarrow \frac{2}{3} \geq x$): $|2-3x| < 3 \Leftrightarrow 2 - 3x < 3 \Leftrightarrow -1 < 3x \Leftrightarrow x > -\frac{1}{3}$

also $-\frac{1}{3} < x \leq \frac{2}{3}$

2. Fall $x > \frac{2}{3}$: $|2-3x| < 3 \Leftrightarrow 3x - 2 < 3 \Leftrightarrow x < \frac{5}{3}$, also $\frac{2}{3} < x < \frac{5}{3}$

also $\{x \in \mathbb{R} : |2 - 3x| < 3\} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$

(b) $\forall x \in \mathbb{R}: x + |x-1| = \underbrace{|1-x| - (1-x)}_{\geq 0} + 1 \geq 1 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}: \frac{1}{x + |1-x|} \leq 1$

$\Rightarrow M := \left\{ x : \frac{1}{|1-x| + x} > 1 \right\} = \emptyset$

c) 1. Fall $x \geq b > a$: $|x-a| + |x-b| = b-a \iff 2x-a-b = b-a \iff x = b$

2. Fall $b > x \geq a$: — " — $\iff x-a+b-x = b-a \iff b-a = b-a$ wahr

3. Fall $b > a > x$: — " — $\iff a-x+b-x = b-a \iff x = a$ ↯

$\Rightarrow M := \{ x \in \mathbb{R} : |x-a| + |x+b| = b-a \} = [a,b]$

4] a) $\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|} = \dfrac{|a+b|+1-1}{1+|a+b|} = 1 - \dfrac{1}{1+|a+b|} \underset{\triangle\text{Ungl.}}{\leq} 1 - \dfrac{1}{1+|a|+|b|} = \dfrac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} =$

K

$= \dfrac{|a|}{1+|a|+|b|} + \dfrac{|b|}{1+|a|+|b|} \leq \dfrac{|a|}{1+|a|} + \dfrac{|b|}{1+|b|}$

b) Es sei $m := \min\left\{ \frac{x_\nu}{y_\nu} : \nu = 1, \dots, n \right\}$, $M := \max\left\{ \frac{x_\nu}{y_\nu} : \nu = 1, \dots, n \right\}$

Somit $m \cdot y_\nu \leq x_\nu = \frac{x_\nu}{y_\nu} \cdot y_\nu \leq M \cdot y_\nu$ f. jedes $\nu = 1, \dots, n$

$\Rightarrow \sum_{\nu=1}^{n} m \cdot y_\nu = m \cdot \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu \leq \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \leq M \cdot \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu \Rightarrow$ Beh. (alle $y_\nu > 0$)

■

Hinweise für Studis: $\alpha \cdot \sum_{j=0}^{n} x_j = \sum_{j=0}^{n} \alpha \cdot x_j$, $\prod_{j=0}^{n} \alpha \cdot x_j = \alpha^{n+1} \cdot \prod_{j=0}^{n} x_j$

$\sum_{j=0}^{n} (x_j + \alpha) = \sum_{j=0}^{n} x_j + (n+1) \cdot \alpha \underset{\text{i.A.}}{\neq} \sum_{j=0}^{n} x_j + \alpha$ (Klammern hier wichtig, oben bzw. auch (bei $\prod \cdots$))

$\prod_{j=0}^{n} (x_j + \alpha) =$ kompliziert $\neq \prod_{j=0}^{n} x_j + \alpha$

$\prod_{j=0}^{n} x_j^{\alpha} = \left(\prod_{j=0}^{n} x_j \right)^{\alpha}$, $\sum_{0}^{n} x_j^{\alpha} \underset{\text{i.A.}}{\neq} \left(\sum_{0}^{n} x_j \right)^{\alpha}$