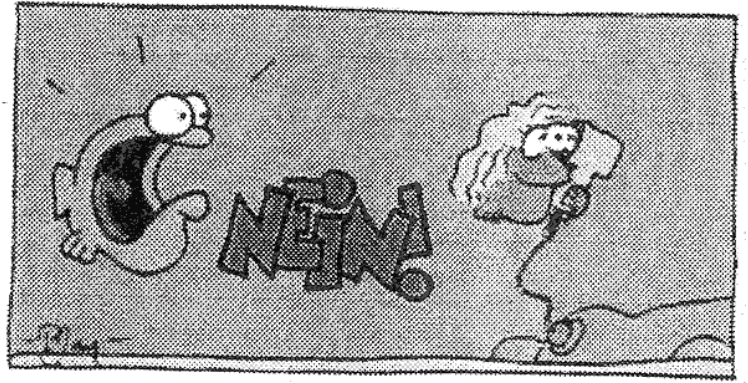


# HM 1:



## Aufgabe 1

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion: Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ist

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$$

## Aufgabe 2

Es sei  $a_k \geq 2$  für  $k = 1, 2, \dots$ . Zeigen Sie die Konvergenz der Reihe (z.B. mittels Majorantenkriterium):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k - 1}{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k}$$

## Aufgabe 3

Berechnen Sie die Grenzwerte

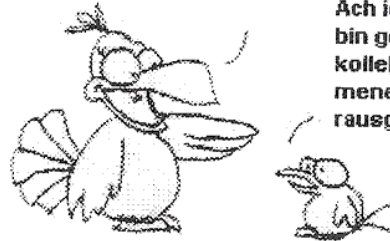
a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x - 1}{\cosh x + 1}$ ;

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos(ax)} - \sqrt{\cos(bx)}}{x^2}$ , ( $a, b \in \mathbb{R}$ );

c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln x}$ .

Hinweis:  $\ln x = \log x$  ( $x > 0$ ).

Hey kleiner Vogel!  
Wasn mit dir los??



Ach ich weiß nich. Ich glaube, ich bin gerade irgendwie aus euerm kollektiv subjektiv wahrgenommenen Raum-Zeit-Kontinuum rausgeklatscht.

## Aufgabe 4

Gegeben sei die Potenzreihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)x^{2n-3}$$

- a) Bestimmen Sie alle  $x \in \mathbb{R}$  für welche die Potenzreihe konvergiert.
- b) Bestimmen Sie für diese  $x$  den Wert der Potenzreihe.

## Aufgabe 5

Es sei die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$f(x) = e^{2x} - e^{-3x}$$

Zeigen Sie, daß  $f$  eine Umkehrfunktion  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  besitzt, und berechnen Sie  $g(0)$ ,  $g'(0)$ .

## Aufgabe 6

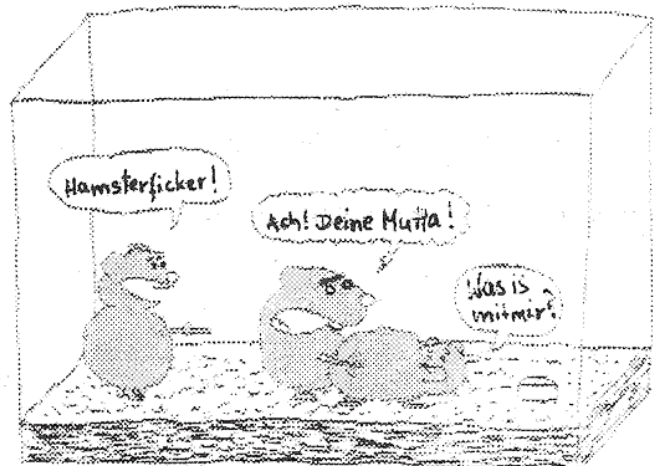
Es sei  $f_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right)$  für  $x \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{N}$ .

- a) Ist die Folge  $(f_n)$  auf  $\mathbb{R}$  gleichmäßig konvergent?
- b) Ist die Folge  $(f_n)$  auf  $[0, 1]$  gleichmäßig konvergent?

## Aufgabe 7

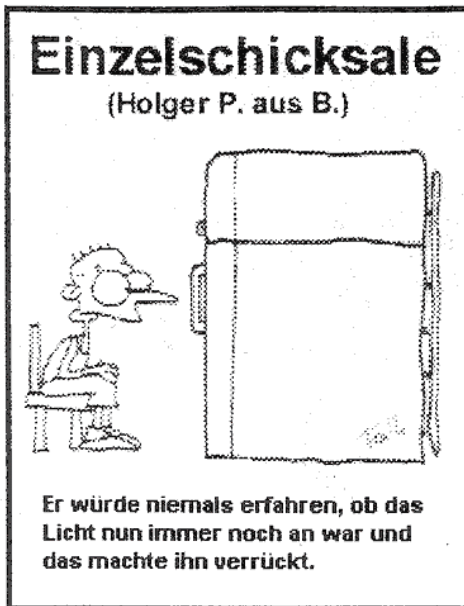
Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \frac{x^2 + x - 1}{x^3 + x} dx, \quad x > 0.$$



Ekelig - Sex mit Tieren!

## HM 2:



### Aufgabe 1

Die Funktion  $f = \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  sei gegeben durch

$$f(x, y) := \frac{x^3}{x^2 + y^2} \text{ für } (x, y) \neq (0, 0) \text{ und } f(0, 0) := 0.$$

- Zeigen Sie  $f \in C(\mathbb{R}^2)$ .
- Berechnen Sie  $\frac{\partial f}{\partial e}(0, 0)$  für einen beliebigen normierten Vektor  $e \in \mathbb{R}^2$ .
- Weisen Sie nach, daß  $f$  in  $(0, 0)$  nicht differenzierbar ist.
- Geben Sie  $\text{grad } f$  für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  an.

### Aufgabe 2

Die Funktion  $f$  sei gegeben durch

$$f(x, y) := xy - 2(x^2 + y^2).$$

Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum von  $f$  auf der Menge

$$T := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 8\}.$$

### Aufgabe 3

Es sei  $R > 0$  und für  $\rho \in (0, R)$  sei

$$B_\rho = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \geq 0, \rho^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}.$$

Bestimmen Sie

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \int_{B_\rho} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} d(x, y, z).$$

### Aufgabe 4

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' + 2xy + 2x^3y^3 = 0, \quad y(0) = 1.$$

### Aufgabe 5

Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

- $y' = y \tan x - 2 \sin x$  für  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ .
- $y' = e^y \sin x$  für  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ .



### Aufgabe 6

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$u^{(4)} + 2u'' + u = \sin(2t), \quad u(0) = u'(0) = u''(0) = u'''(0) = 0.$$

### Aufgabe 7

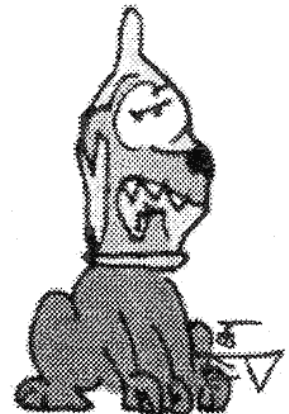
Gegeben seien  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x, & x \in (-\pi, 0), \\ \beta x, & x \in [0, \pi], \end{cases} \quad \text{und } f(x + 2\pi) = f(x).$$

- Geben Sie die Koeffizienten  $a_k$  und  $b_k$  in der folgenden Darstellung der Fourierreihe von  $f$  an:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

- Geben Sie (in Abhängigkeit von  $\alpha$  und  $\beta$ ) an, in welchen Punkten  $x \in \mathbb{R}$  die Funktion  $f$  durch ihre Fourierreihe dargestellt wird, und begründen Sie Ihre Antwort.



**Kondome schützen!**