Aufgaben Teil 1

I.1 Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

a) $a_n := \sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2+1}$, b) $a_n := \mathrm{e}^{-n}(2\cos n)^n$, c) $a_n := \dfrac{3^n}{2^n - 1}$

I.2 Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{n^3} x^n$$

und bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die diese Reihe konvergiert.

I.3 Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

$$\text{a) } \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{\arctan x} - \cos^2 x}{x}; \qquad \text{b) } \lim_{x\to\infty} \left(1 - x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

I.4 a) Zeigen Sie für alle $x, y \geq 0$: $|\log(1+x) - \log(1+y)| \leq |x-y|$.

b) Zeigen Sie: $\displaystyle\int_0^1 x^2 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{\mathrm{e}}$.

I.5 Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\text{a) } \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\,dx; \qquad \text{b) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x\,dx; \qquad \text{c) } \int_0^4 \frac{dx}{x^2 - 4x + 8}$$

I.6 Bestimmen Sie für die folgende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diejenigen $x_0 \in \mathbb{R}$, in denen f differenzierbar ist, und berechnen Sie in diesen Punkten $f'(x_0)$.

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin(\mathrm{e}^{1/|x|} - \frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

I.7 Zeigen Sie, daß das uneigentliche Integral

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{(1+\sqrt{x})^3}\,dx$$

konvergiert und daß sein Wert im Intervall $[0, 2]$ liegt.

Aufgaben Teil 2

II.1 Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen alle Punkte, in denen die partiellen Ableitungen existieren, und geben Sie die partiellen Ableitungen jeweils an:

$$\text{a) } f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x, y, z) = e^{zy^2} \sin(x + yz).$$

$$\text{b) } f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^2}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

II.2 Sei $D := (0, 1) \times (-1, 0)$ und $f : D \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f(x, y) := (e^{-x(1+y)}, \log(1 + x - y)) \text{ für } (x, y) \in D.$$

a) Bestimmen Sie für $(x, y) \in D$ die Jacobi-Matrix für $J_f(x, y)$.
b) Zeigen Sie $|||J_f(x, y)||| \leq 2$ für $(x, y) \in D$.
c) Zeigen Sie für alle $(\tilde{x}, \tilde{y}), (x, y) \in D$:

$$||f(x, y) - f(\tilde{x}, \tilde{y})|| \leq 2||(x, y) - (\tilde{x}, \tilde{y})||.$$

Hinweis für Hörer von Dr. Schmöger: Die Jacobi-Matrix ist die Funktionalmatrix und $|||J_f(x, y)|||$ bezeichnet deren Norm $||J_f(x, y)||$.

II.3 Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) := \cos(\pi x) + \cos(\pi y)$. Bestimmen Sie die Lage und Art aller lokalen Extremstellen von f.

II.4 Berechnen Sie ein Fundamentalsystem für $y' = Ay$, wobei $A := \begin{pmatrix} -4 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & 5 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

II.5 Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'' - y' - 6y = e^{2x} + 2$, sowie die Lösung mit $y(0) = y'(0) = 0$.

II.6 Berechnen Sie die Fourierreihe der 2π-periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die auf $[-\pi, \pi]$ gegeben ist durch $f(x) := \cosh(x)$.

Geben Sie diejenigen $x \in \mathbb{R}$ an, in denen die Fourierreihe von f gegen $f(x)$ konvergiert.

II.7 a) Berechnen Sie die Fouriertransformierte der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ f(t) := \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

b) Berechnen Sie die inverse Laplacetransformation von

$$z \mapsto \frac{1}{z-4} + \frac{z+2}{z^2+4}.$$