Lösungen /HM 1

Aufgabe 1

Für $n, m \in \mathbb{N} : \frac{1}{2^n} + \frac{1}{m} \leq \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$ und $\frac{3}{2} = \frac{1}{2} + 1 \in M$,
also $\quad \sup M = \max M = \frac{3}{2}$.
Klar: 0 ist untere Schranke von M.
Sei $\epsilon > 0 \Rightarrow \exists\, n_0, m_0 \in \mathbb{N} : \frac{1}{2^{n_0}} < \frac{\epsilon}{2}, \frac{1}{m_0} < \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow x := \frac{1}{2^{n_0}} + \frac{1}{m_0} \in M$ und $x < \epsilon$.
D.h.: $0 = \inf M$. Klar: $\min M$ existiert nicht.

Aufgabe 2

(a). $a_{2n} \to 1,\ a_{2n+1} \to -1$
$\Rightarrow +1, -1$ sind Häufungswerte von (a_n)
$|a_n| \leq 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow \limsup a_n = 1,\ \liminf a_n = -1.$

(b). $a_{2n} \to 1$ und $a_{2n} \neq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \Rightarrow 1 \in H(M).$
$a_{2n+1} \to -1$ und $a_{2n+1} \neq -1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \Rightarrow -1 \in H(M).$

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $|a| \neq 1$. Wähle $\epsilon > 0$ so, daß

$$(U_\epsilon(-1) \cup U_\epsilon(1)) \cap U_\epsilon(a) = \emptyset$$

Dann: $a_n \in U_\epsilon(-1) \cup U_\epsilon(1)$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow a_n \in U_\epsilon(a)$ für höchstens endlich viele $n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow a \notin H(M)$. Also $H(M) = \{-1, 1\}$.

Aufgabe 3

(b). $n^5 \leq 1 + n^5 \leq a_n \leq 2^n \Rightarrow \sqrt[n]{n^5} \leq \sqrt[n]{|a_n|} \leq 2 \Rightarrow 1 \leq \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \leq 2$
$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq R \leq 1$

(c). $\forall x \in \mathbb{R} : |a_n x^n| \leq \frac{1}{n!}|x|^n,\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!}$ konvergiert
$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergiert.

Aufgabe 4

(a). Sei $x \in I$ und $a_n = \frac{x^n}{1+x^{2n}}$

Fall 1: $I \subseteq (-1,1)$

$\Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{1+x^{2n+2}}\frac{1+x^{2n}}{x^n}\right| = |x|\frac{1+x^{2n}}{1+x^2x^{2n}} \to |x| < 1 \quad (\text{für } n \to \infty)$

$\Rightarrow \sum a_n$ konvergiert.

Fall 2: $I \not\subseteq (-1,1) \Rightarrow I \subseteq (1,\infty)$ oder $I \subseteq (-\infty,-1) \Rightarrow |x| > 1$

$a_n = \frac{x^n}{1+x^{2n}} = \frac{1}{\frac{1}{x^n}+x^n} \overset{t=\frac{1}{x}}{=} \frac{1}{t^n+\frac{1}{t^n}} = \frac{t^n}{1+t^{2n}}$

$|t| < 1 \overset{\text{Fall1}}{\Rightarrow} \sum a_n$ konvergiert.

(b). Sei $x \in I_1 \Rightarrow \left|\frac{x^n}{1+x^{2n}}\right| \leq \frac{|x|^n}{1} \leq \varepsilon^n; \qquad 0 < \varepsilon < 1$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n$ konvergiert $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$ konvergiert glm. auf I_1

(Maj.-Krit. von Weierstraß).

Sei $x \in I_2$ oder $x \in I_3$, also $|x| > 1+\varepsilon$,

$t := \frac{1}{x} \Rightarrow |t| < \frac{1}{1+\varepsilon} =: q, \qquad q < 1; \left|\frac{x^n}{1+x^{2n}}\right| \overset{\text{s.o.}}{=} \frac{|t|^n}{1+t^{2n}} \leq |t|^n < q^n$

$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ konvergiert, Maj.-Krit. von Weierstraß

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$ konvergiert gleichmäßig auf I_2 und I_3.

Aufgabe 5

(a). $f'(x) = 2x - 2 \geq 0\ \forall x \geq 1,\ f'(x) > 0$ auf $(1,\infty)$

$\Rightarrow$ f ist auf $[1,\infty)$ streng wachsend.

$f(1) = 2,\ \lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$. Zwischenwertsatz $\Rightarrow f([1,\infty)) = [2,\infty)$.

(b). $f(3) = 9 - 6 + 3 = 6 \Rightarrow f^{-1}(6) = 3 \Rightarrow (f^{-1})'(6) = \frac{1}{f'(3)} = \frac{1}{4}$.

Aufgabe 6

(a). $f(x) := \log(1+x) - \frac{x}{1+x} \qquad$ für $x \geq 0$.

$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2} > 0 \qquad \forall x > 0$

$\Rightarrow f$ ist auf $(0.\infty)$ streng monoton wachsend, $f(0) = 0$

$\Rightarrow f(x) > 0 \qquad$ für $x > 0$

$\Rightarrow$ Beh.

(b). MWS $\Rightarrow \frac{e^\beta - e^\alpha}{\beta-\alpha} = e^\xi$ mit $\xi \in (\alpha,\beta)$

$\Rightarrow e^\alpha < e^\xi < e^\beta$

$\Rightarrow$ Beh.

Aufgabe 7

(a). $\int_0^1 x^n(1-x)^m dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Subst.: } x = 1-\xi \\ dx = -d\xi \end{array} \right\} = \int_1^0 (1-\xi)^n \xi^m (-d\xi)$

$= \int_0^1 (1-\xi)^n \xi^m d\xi$.

(b). $I_{n+1} = \int_1^e \underbrace{1}_{u'} \underbrace{(\log x)^{n+1}}_{v} dx = x(\log x)^{n+1}|_1^e - \int_1^e x(n+1)(\log x)^n \frac{1}{x}\, dx =$

$e - (n+1)\int_1^e (\log x)^n dx = e - (n+1)I_n$

(c). $\int_{1/2}^1 \frac{dx}{1+x^2} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Subst.: } x = \frac{1}{t} \\ dx = -\frac{1}{t^2}dt \end{array} \right\} = \int_2^1 (-\frac{1}{t^2})\frac{dt}{1+\frac{1}{t^2}} = \int_1^2 \frac{dt}{t^2+1} = \int_1^2 \frac{dx}{1+x^2}$

Lösungen für 'HM 2

Aufgabe 1

$f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^n$ differenzierbar in $0 \Rightarrow f$ stetig in 0.
Nach Voraussetzung existiert $\alpha \in \mathbb{R}^n : f(h_k) = \alpha$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Es gilt: $f(0) = \lim_{k\to 0} f(h_k) = \alpha$. Für $k \in \mathbb{N}$ gilt somit:

$$\underbrace{\frac{f(h_k) - f(0) - f'(0)h_k}{\|h_k\|}}_{\substack{k\to\infty \\ \longrightarrow 0}} = f'(0)\frac{h_k}{\|h_k\|} \to f'(0)v$$

Wegen $f'(0)v = 0$ und $v \neq 0$ $\quad (\|v\| = \lim_{k\to\infty} \|\frac{h_k}{\|h_k\|}\| = 1)$
ist v Eigenvektor von $f'(0)$ zum Eigenwert 0.

Aufgabe 2

(a). f ist stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^3$; grad $f(x,y,z) = 2e^{x^2+y^2-z^2}(x,y,-z)$.
Somit gilt: $\max\{\frac{\partial f}{\partial v}(3,4,5) : v \in \mathbb{R}^3, \|v\| = 1\} = \|\text{grad } f(3,4,5)\|$
$= \|2(3,4,-5)\| = 2(9+16+25)^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{50} = 10\sqrt{2}$

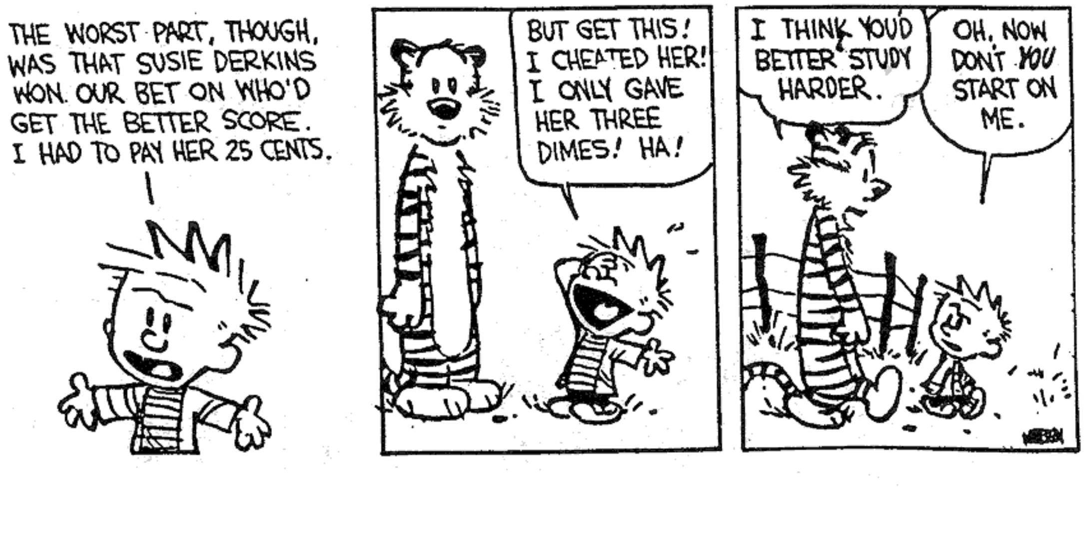
(b). Sei $g(s) := \int\limits_0^s e^{t^2}\,dt \ (s \in \mathbb{R}) \Rightarrow g'(s) = e^{s^2}$
Wegen $f(x,y) = g(2+x^2) - g(\sin(xy))$ folgt
$f_x(x,y) = \exp((2+x^2)^2)2x - \exp(\sin^2(xy))\cos(xy)y$ und
$f_y(x,y) = -\exp(\sin^2(xy))\cos(xy)x$.

Aufgabe 3

D ist konvex, f ist differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$, $grad(x,y) = (2xy, x^2)$.
Für $(x,y), (\tilde{x},\tilde{y}) \in D$ gilt (MWS):
$\exists\, \xi \in S((x,y),(\tilde{x},\tilde{y})) \subseteq D : f(x,y) - f(\tilde{x},\tilde{y}) = f'(\xi)(x-\tilde{x}, y-\tilde{y})$
$= (2\xi_1\xi_2, \xi_1^2)(x-\tilde{x}, y-\tilde{y})$
$\Rightarrow |f(x,y) - f(\tilde{x},\tilde{y})| \overset{CSU}{\leq} \|f'(\xi)\|\,\|(x-\tilde{x}, y-\tilde{y})\| = \sqrt{4\xi_1^2\xi_2^2 + \xi_1^2}\|(x-\tilde{x}, y-\tilde{y})\|$
$\leq \sqrt{16+1}\|(x-\tilde{x}, y-\tilde{y})\| = \sqrt{17}\sqrt{(x-\tilde{x})^2 + (y-\tilde{y})^2}$.

Aufgabe 4

$f(1,1) = 1-2+1 = 0$, $f_y(1,1) = 6-8 = -2 \neq 0$, f ist stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$. Nach dem Satz über implizit definierte Funktionen ex. $\epsilon > 0$ und $y : (1-\epsilon, 1+\epsilon) \to \mathbb{R}$ mit $y(1) = 1$ und $f(x,y(x)) = 0 \quad (|x-1| < \epsilon)$,
und y ist differenzierbar auf $(1-\epsilon, 1+\epsilon)$. Es gilt:
$0 = \frac{d}{dx}f(x,y(x)) = f_x(x,y(x)) + f_y(x,y(x))y'(x) \quad (|x-1| < \epsilon)$ und
$f_x(1,1) = 4-4+1 = 1 \Rightarrow y'(1) = -\frac{f_x(1,1)}{f_y(1,1)} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$.

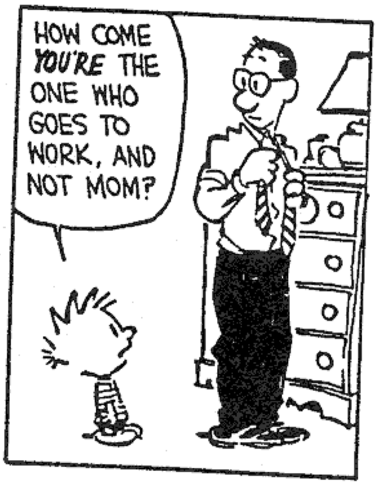


Aufgabe 5

$\operatorname{grad} f(x,y) = ((5x^4 - 6x^5)e^y, (x^5 - x^6)e^y) = e^y(x^4(5-6x), x^5(1-x))$
$\operatorname{grad} f(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee (6x = 5 \wedge x = 1) \Leftrightarrow x = 0.$
1.Fall: $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x \neq 0$
$\Rightarrow \operatorname{grad} f(x,y) \neq 0 \Rightarrow (x,y)$ ist keine lokale Extremalstelle.
2.Fall: $(0,y) \in \mathbb{R}^2$:
$f(0,y) = 0$ und es gilt: $f(x,y) \leq x^5(1-x)e^y < 0$ für $x < 0$,
$f(x,y) > 0$ für $x \in (0,1) \Rightarrow (0,y)$ ist keine lokale Extremalstelle.

Aufgabe 6

$$e^{-2y(x)}y'(x) = \frac{1}{1+x^2}, y(0) = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\int_0^x e^{-2y(\xi)}y'(\xi) = \int_0^x \frac{1}{1+(\xi)^2}d\xi \quad , y(0) = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\left[-\frac{1}{2}e^{-2y(\xi)}\right]_0^x = \left[\arctan\xi\right]_0^x \quad , y(0) = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$-\frac{1}{2}e^{-2y(x)} + \frac{1}{2}e^0 = \arctan x \quad \Leftrightarrow$$
$$e^{-2y(x)} = 1 - 2\arctan x \quad \Leftrightarrow$$
$$y(x) = -\frac{1}{2}\log(1 - 2\arctan x) \qquad (*)$$
Es gilt: $1 - 2\arctan x > 0 \Leftrightarrow x < \tan\frac{1}{2}$
$\Rightarrow$ (*) ist die Lösung des AWPs auf $(-\infty, \tan\frac{1}{2})$.



Aufgabe 7

Sei $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}, f(t) = t\cos(t^2)$.
Es gilt: $|f(t)| = |t\cos(t^2)| \leq t \qquad (t \geq 0)$
$\overset{\text{Satz d. Vorl.}}{\Rightarrow} \int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$ konvergiert für $s > 0$. Für $s > 0$ fest und $T > 0$ gilt:

$$\int_0^T \underbrace{e^{-st}}_{u}\underbrace{f(t)}_{v'}\,dt = \left[e^{-st}\tfrac{1}{2}\sin(t^2)\right]_0^T + \int_0^T se^{-st}\tfrac{1}{2}\sin(t^2)\,dt =$$
$$\tfrac{1}{2}e^{-sT}\sin(T^2) + \int_0^T \tfrac{s}{2}e^{-st}\sin(t^2)\,dt \quad \overset{T\to\infty}{\longrightarrow} \tfrac{s}{2}\int_0^\infty e^{-st}\sin(t^2)\,dt$$
$$\Rightarrow |F(s)| = \left|\tfrac{s}{2}\int_0^\infty e^{-st}\sin(t^2)\,dt\right| \leq \tfrac{s}{2}\int_0^\infty e^{-st}\,dt = \lim_{T\to\infty}\tfrac{s}{2}\left[-\tfrac{1}{s}e^{-st}\right]_0^T =$$
$$\lim_{T\to\infty}\tfrac{1}{2}(1 - e^{-st}) = \tfrac{1}{2} \qquad (s > 0)$$