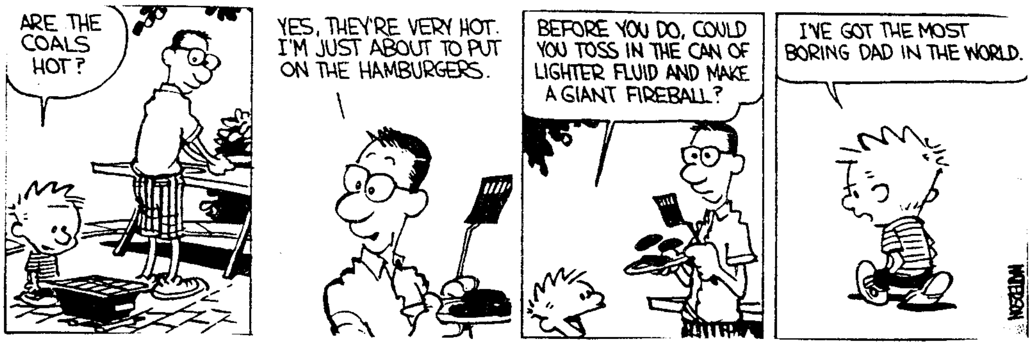
Teil I

Aufgabe 1

Untersuchen sie folgende Folgen $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ auf Konvergenz und bestimmen sie gegebenenfalls den Grenzwert:

a. $a_n = \frac{\sqrt{n}+1}{(\sqrt[3]{n}+\sqrt[5]{n})^2}$;

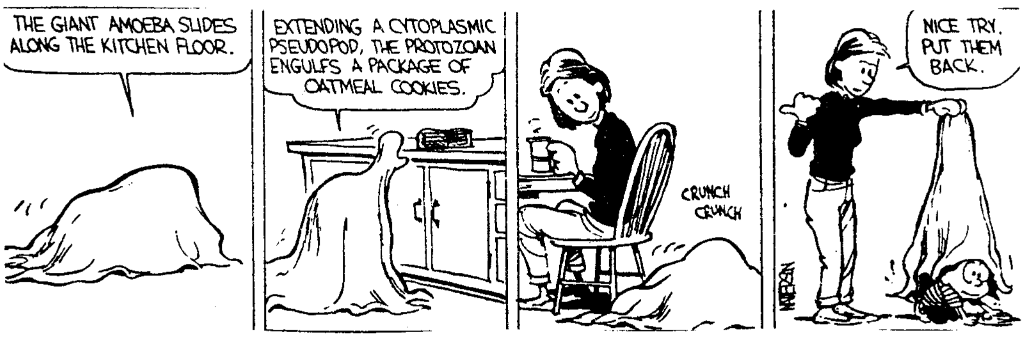
b. $a_n = \sqrt{n^3+n^2} - \sqrt{n^3+1}$;



Aufgabe 2

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(2^{\sqrt{n^2+1}+\sin n}\right) x^{3n}.$$



Aufgabe 3

Zeigen Sie, daß die Funktionenfolge $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $f_n: [0,2] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = nx(x-2)(1-x)^n$ punktweise, aber nicht gleichmäßig auf [0,2] gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 4

Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} (e^{x^2} - \cos x) \sin \frac{1}{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 5

Berechnen Sie

$$\int_0^1 x 2^x \, dx.$$

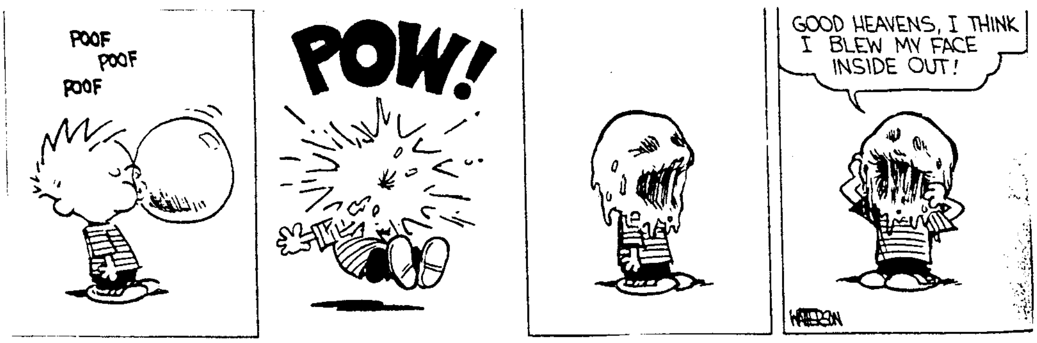
Aufgabe 6

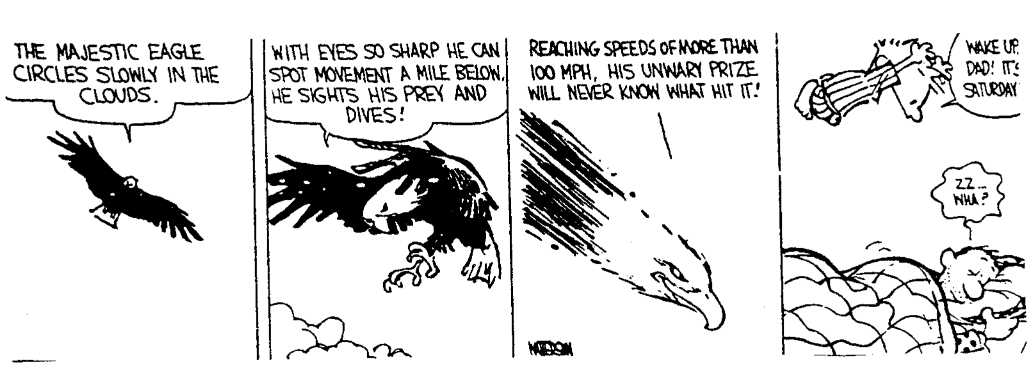
Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ konvergiert das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{e^{ax}}{x^{1+a^2} + e^{ax}} \, dx.$$

Aufgabe 7

Es sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodisch mit $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \in [-\pi, 0] \\ e^x, & x \in [0, \pi] \end{cases}$ Bestimmen Sie die Koeffizienten der Fourierreihe von f sowie den Reihenwert der Fourierreihe für jedes $x \in [-\pi, \pi]$.





Teil II

Aufgabe 1

Die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$.

a. Zeigen Sie, daß f in $(0,0)$ nicht differenzierbar ist.

b. Bestimmen Sie alle Vektoren $a \in \mathbb{R}^2$ mit $\|a\| = 1$ so, daß $\frac{\partial f}{\partial a}(0,0)$ existiert.

Aufgabe 2

Die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) = x^3 + y^2 - 3x - 2y.$$

Bestimmen Sie alle Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad} f(x,y) = (0,0)$.
Welche dieser Punkte sind Stellen lokaler Extremwerte von f?

Aufgabe 3

Die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}$ und nicht konstant.
Weiter sei $f(1) = 0$ und $f'(1) \neq 1$.
Zeigen Sie: Es gibt eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^2$ von $(1,1)$ und eine Funktion $g: U \to \mathbb{R}$ mit $g(1,1) = 1$ und

$$g(x,y) = x + yf(g(x,y))$$

für jedes $(x,y) \in U$.
Berechnen Sie $g_y(1,1)$.

Aufgabe 4

Es sei $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x \in [-1,1], \; 0 \leq y \leq 1 - x^2, \; 0 \leq z \leq y\}$.
Berechnen Sie den Inhalt von B. (Skizze!)

Aufgabe 5

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = -2xy + xe^{-x^2}.$$

Aufgabe 6

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$(1 + y^2 + 2xy)dx + (2yx + x^2)dy = 0,\ y(1) = 1.$$

Aufgabe 7

Berechnen Sie ein Fundamentalsystem von

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} y.$$